PEDAGOGÍA
Y DIDÁCTICA

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

Pablo Flores Martínez
Luis Rico Romero
(Coords.)

PIRÁMIDE

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

Coordinadores
PABLO FLORES MARTÍNEZ
LUIS RICO ROMERO
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «PSICOLOGÍA»
Sección: Pedagogía

Director:
Francisco J. Labrador
Catedrático de Modificación de Conducta
de la Universidad Complutense de Madrid

Edición en versión digital

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Luis Rico Romero y Pablo Flores Martínez (Coords.), 2015
© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2015
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-3293-8

Relación de autores

Natividad Adamuz Povedano
Universidad de Córdoba.

Rafael Bracho López
Universidad de Córdoba.

María Consuelo Cañadas Santiago
Universidad de Granada.

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada.

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada.

Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada.

Aurora del Río Cabeza
Universidad de Granada.

Francisco Fernández García
Universidad de Granada.

José Antonio Fernández Plaza
Universidad de Granada.

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada.

Francisco Gil Cuadra
Universidad de Almería.

Pedro Gómez Guzmán
Universidad de Los Andes (Colombia).

María José González López
Universidad de Cantabria.

Noelia Jiménez Fanjul
Universidad de Córdoba.

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada.

Marta Molina González
Universidad de Granada.

Ana Belén Montoro Medina
Universidad de Almería.

M.ª Francisca Moreno Carretero
Universidad de Almería.

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada.

Luis Rico Romero
Universidad de Granada.

Isabel M.ª Romero Albaladejo
Universidad de Almería.

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Universidad de Granada.

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada.

Luis Serrano Romero
Universidad de Granada.

Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba.

© Ediciones Pirámide

Índice

Introducción 17

PARTE PRIMERA
Fundamentos y cuestiones generales

1. Matemáticas escolares y conocimiento didáctico *(Luis Rico Romero)* ... 21

1. Expectativas de este libro 23
   1.1. Objetivos generales 23
   1.2. Competencias profesionales 24
2. Sistema educativo y matemáticas escolares 24
   2.1. Educación matemática 25
   2.2. Matemáticas en el currículo 26
3. Fines educativos y planes de formación 27
   3.1. Fines de la educación matemática 27
   3.2. Currículo de matemáticas 27
   3.3. Planificación del currículo 28
4. Conocimiento del profesor de matemáticas 29
   4.1. Contenidos matemáticos escolares 29
   4.2. Conocimiento sobre el contenido matemático 31
   4.3. Conocimiento didáctico del contenido 32
   4.4. Conocimiento didáctico y competencias del profesor 33
5. Sistema educativo y formación de profesores 33
   5.1. Formación del maestro de matemáticas 34
   5.2. Análisis del contenido 35
6. Conocimiento didáctico y método de análisis 36
   6.1. Planificación docente 36
   6.2. Libros de texto y análisis didáctico 37
   6.3. Conocimiento didáctico sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas 38

Conclusiones 39

2. Aprender las matemáticas escolares *(José Luis Lupiáñez Gómez y Luis Rico Romero)* 41

1. Cómo se aprenden las matemáticas escolares 43
2. Competencia matemática y sentido matemático escolar 44

© Ediciones Pirámide

3. La planificación del aprendizaje matemático 46
4. Análisis cognitivo 47
4.1. Categorías del análisis cognitivo 47
5. Expectativas sobre el aprendizaje 48
5.1. Qué son las expectativas sobre el aprendizaje escolar 48
5.2. Enunciar objetivos específicos para un tema de matemáticas 49
5.3. Criterios para la redacción de objetivos específicos 50
6. Limitaciones en el aprendizaje 51
6.1. Dificultades de aprendizaje en matemáticas 52
6.2. Errores en las matemáticas escolares 53
6.3. Planificación y tratamiento de errores y dificultades 55
7. Oportunidades de aprendizaje 55
7.1. Tareas como oportunidades de aprendizaje 56
7.2. Demandas cognitivas de las tareas 57
Conclusiones 59

3. Enseñar las matemáticas escolares *(Pedro Gómez Guzmán e Isabel M.ª Romero Albaladejo)* 61

1. Ideas clave para la planificación de una tarea 63
2. Planificación de tareas escolares y expectativas y limitaciones de aprendizaje. 64
2.1. Tareas escolares y objetivos de aprendizaje 65
2.2. Tareas escolares y limitaciones de aprendizaje 65
3. Búsqueda de tareas matemáticas escolares 66
4. Tarea matemática escolar 67
4.1. Descripción de una tarea matemática escolar 67
4.2. Meta 69
4.3. Formulación de la tarea matemática escolar 69
4.4. Materiales y recursos 69
4.5. Agrupamiento 71
4.6. Comunicación e interacción en clase 71
4.7. Temporalidad de la tarea matemática escolar 73
5. Análisis de tareas matemáticas escolares 73
6. Análisis de las tareas matemáticas escolares de longitud y superficie 75
6.1. Tareas de longitud 75
6.2. Tarea matemática escolar de superficie 76
7. Modificación de tareas matemáticas escolares 78
7.1. Momento 1. Detección de ideas previas 79
7.2. Momento 2. Estimamos y medimos la estatura de los niños de la clase y la superficie de la huella de sus pies 79
7.3. Momento 3. Puesta en común en gran grupo 81
7.4. Análisis de la tarea 81
8. Ampliación de la tarea matemática escolar 85
8.1. Momento 4a. La huella del docente 85
8.2. Momento 4b. Relación entre tamaños 85
9. Resumen 87

4. Matemáticas y resolución de problemas *(Enrique Castro Martínez y Juan Francisco Ruiz Hidalgo)* 89

1. La resolución de problemas en propuestas curriculares 91
2. Qué es un problema 92

© Ediciones Pirámide

2.1. El problema como reto: una perspectiva cognitiva 92
2.2. El problema como tarea matemática escolar 93
2.3. Ejercicios, problemas y enigmas 94
3. Resolución de problemas e instrucción 95
3.1. Enseñar para la resolución de problemas 95
3.2. Enseñar sobre la resolución de problemas 96
3.3. Enseñar a través de la resolución de problemas 98
4. Estrategias 99
4.1. Comparar estrategias 101
5. Invención de problemas 102
6. Evaluación de la resolución de problemas 105
7. Reflexiones didácticas sobre la resolución de problemas 105

PARTE SEGUNDA
Estudio del sentido matemático escolar

5. Sentido numérico *(Encarnación Castro Martínez e Isidoro Segovia Alex)* .. 109

1. Sentido numérico 111
1.1. Capacidades que caracterizan el sentido numérico 111
2. Tratamiento curricular del sentido numérico 116
2.1. Capacidades a desarrollar según distintos estudios 116
3. Enseñanza para desarrollar el sentido numérico en Primaria 117
3.1. Tareas con las que trabajar el sentido numérico 118
3.2. Modificación de tareas 124
4. Evaluación 126

6. Sentido espacial *(Pablo Flores Martínez, Rafael Ramírez Uclés y Aurora del Río Cabeza)* 127

1. Sentido espacial 129
1.1. Manejo de conceptos geométricos 130
1.2. Destrezas de visualización 132
1.3. Conexión entre las componentes del sentido espacial 133
2. Tareas para desarrollar el sentido espacial 135
2.1. Aprendizaje de las simetrías mediante espejos 135
2.2. Geoplanos y sentido espacial 137
2.3. Transformaciones de figuras geométricas 139
2.4. Importancia de las imágenes para el aprendizaje de la geometría 140
3. El sentido espacial en el currículo de matemáticas de Primaria 142
4. Enseñanza para desarrollar el sentido espacial en Primaria 144

7. Sentido de la medida *(María Francisca Moreno Carretero, Francisco Gil Cuadra y Ana Belén Montoro Medina)* 147

1. Consideraciones curriculares 149
2. El sentido de la medida 151
2.1. Reconocimiento de cualidades comparables y medibles 151
2.2. Comprensión del proceso de medir 153
2.3. Desarrollo de estrategias para estimar 156

© Ediciones Pirámide

3. Sentido de la medida y matemática escolar 158
3.1. Percepción: Los escolares perciben las propiedades de los objetos... 158
3.2. Comparación: Los escolares deben comparar objetos por sus cualidades..... 159
3.3. Unidades no estándar. Medidas no convencionales 160
3.4. Unidades estándar. Medidas convencionales..... 161
3.5. Sistema internacional (SI) y su enseñanza..... 162
3.6. Aprecio y satisfacción en la medida y en la estimación 163
3.7. Usar los instrumentos y el vocabulario de la medida con precisión y eficacia 164
3.8. La medida como aproximación 166
3.9. Construcciones con medidas y escalas..... 167
3.10. Resolución de problemas, experiencia con la medida y la estimación 167
4. Balance 168

8. Sentido estocástico *(Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Luis Serrano Romero)* 169

1. Sobre el sentido y el razonamiento estocástico..... 171
1.1. Conocimientos básicos que sostienen el sentido estocástico..... 173
1.2. Relación del sentido estocástico con otros sentidos matemáticos..... 175
2. Identificación de situaciones aleatorias y cuantificación de la incertidumbre..... 176
2.1. Determinismo y aleatoriedad 176
2.2. Cuantificación de la incertidumbre 177
3. Tratamiento de la información 179
3.1. Búsqueda y obtención de información 179
3.2. Resumen y síntesis de la información 179
3.3. Aspectos didácticos 181
4. El sentido estocástico en la Educación Primaria 182

PARTE TERCERA
Enseñanza y aprendizaje

9. Enseñanza y aprendizaje del número natural y del número entero *(Encarnación Castro Martínez y Marta Molina González)* 187

1. Focos de contenido del tema en Educación Primaria..... 189
2. Objetivos del aprendizaje..... 189
3. Dificultades y errores en el aprendizaje 190
3.1. Dificultades asociadas a la escritura y lectura de números naturales.. 190
3.2. Dificultades asociadas a características del sistema decimal de numeración 191
3.3. Dificultades con el cero 192
3.4. Dificultad sobre la relación de divisibilidad 192
3.5. Dificultades con los números enteros 193
4. Etapas de aprendizaje de los contenidos numéricos 193
4.1. Los números naturales..... 193
4.2. Los números enteros..... 195

© Ediciones Pirámide

5. Materiales y recursos para la enseñanza 196
5.1. Material narrativo 196
5.2. Materiales manipulativos 196
5.3. Materiales virtuales 199
6. Estrategias de enseñanza y tareas que promueven el aprendizaje 199
6.1. Enseñanza de los números naturales 199
6.2. Enseñanza de los números enteros 202

10. Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas *(Pablo Flores Martínez, Elena Castro Rodríguez y José Antonio Fernández Plaza)* 205

1. Enseñanza y aprendizaje de la estructura aditiva 207
1.1. Etapas en el aprendizaje de la estructura aditiva 208
1.2. Acciones 208
1.3. Modelos 208
1.4. Símbolos 208
1.5. Hechos numéricos y tablas 208
1.6. Algoritmos 211
1.7. Resolución de problemas aditivos 211
2. Dificultades y errores en el proceso de aprendizaje de las operaciones aditivas 212
2.1. Dificultades ligadas al contenido matemático 212
2.2. Dificultades cognitivas o dificultades ligadas al alumno 214
2.3. Dificultades ligadas con la enseñanza 215
2.4. Errores de comprensión-representación 215
2.5. Errores de ejecución del algoritmo 216
3. Materiales para el trabajo de la estructura aditiva 217
4. Enseñanza de la estructura multiplicativa 218
4.1. Estructura multiplicativa 218
4.2. Etapas para la enseñanza de la multiplicación y de la división 219
4.3. Materiales y recursos 221
5. Aprendizaje de la estructura multiplicativa 222
5.1. Hechos numéricos y tablas 222
5.2. Algoritmos 223
5.3. Resolución de problemas 224
6. Dificultades y errores en el aprendizaje de las operaciones multiplicativas 226
6.1. Dificultades relativas a la complejidad de las operaciones multiplicativas 227
6.2. Dificultades semánticas debidas a obstáculos por el lenguaje 228
6.3. Dificultades relacionadas con la enseñanza 228

11. Enseñanza y aprendizaje de los números racionales y sus operaciones *(Encarnación Castro Martínez, Elena Castro Rodríguez, José Antonio Fernández Plaza, Pablo Flores Martínez y Marta Molina González)* 231

1. Aprendizaje de los números racionales 233
1.1. Dificultades con las fracciones 233
1.2. Dificultades con la notación decimal de los números racionales 235
1.3. Dificultades con la notación de porcentaje para racionales 236
1.4. Etapas en el aprendizaje de los números racionales 237
2. Enseñanza de los números racionales 239

© Ediciones Pirámide

2.1. Materiales y recursos para la enseñanza de los racionales 239
2.2. Estrategias de enseñanza y tareas para las fracciones 241
2.3. Estrategias de enseñanza y tareas para los decimales y porcentajes.. 243
3. Operaciones con fracciones y decimales..... 244
3.1. Operaciones con racionales en el currículo de Primaria..... 244
3.2. Enseñanza de las operaciones aditivas con racionales en Primaria. 246
3.3. Etapas en la enseñanza de operaciones multiplicativas con racionales. 248
3.4. Dificultades y errores en el aprendizaje de las operaciones con racionales..... 250

12. Enseñanza y aprendizaje de la geometría *(Isabel M.ª Romero Albaladejo y María Consuelo Cañadas Santiago)*..... 253

1. Focos de contenido 255
1.1. La situación en el plano y en el espacio 255
1.2. Formas planas y espaciales..... 255
1.3. Regularidades e isometrías 256
1.4. Objetivos del bloque de geometría según focos del contenido..... 256
1.5. Secuenciación de los contenidos del bloque de geometría..... 258
2. El modelo de Van Hiele para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos..... 259
2.1. Características del modelo..... 259
2.2. Niveles de razonamiento 259
2.3. Fases del modelo de Van Hiele..... 262
3. Dificultades y errores 263
3.1. Dificultades debidas a la identificación de los conceptos geométricos con sus representaciones..... 263
3.2. Dificultades relativas a la tridimensionalidad 266
3.3. Dificultades relacionadas con la orientación y posicionamiento..... 269
4. Materiales, recursos y tareas para el trabajo de la geometría 271
4.1. La situación en el plano y en el espacio 271
4.2. Formas planas y espaciales..... 272
4.3. Regularidades e isometrías 277

13. Enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida *(María José González López)* 281

1. Focos de contenido de las magnitudes y su medida en Primaria..... 283
2. Objetivos de la enseñanza de las magnitudes y su medida en Primaria..... 285
2.1. Objetivos de aprendizaje de la longitud..... 285
2.2. Objetivos de aprendizaje de la superficie..... 286
2.3. Objetivos del aprendizaje de la capacidad 287
2.4. Objetivos de aprendizaje del volumen 288
3. Aprendizaje de la medida de magnitudes..... 289
3.1. Aprendizaje de la longitud 290
3.2. Aprendizaje de la superficie..... 291
3.3. Aprendizaje de la capacidad y del volumen..... 293
4. Dificultades y errores en el aprendizaje de las magnitudes y su medida 294
4.1. Dificultades asociadas a la conservación de la cantidad 294
4.2. Dificultades asociadas a la percepción de la magnitud 296
4.3. Dificultades asociadas a la unidad de medida..... 297

© Ediciones Pirámide

4.4. Dificultades asociadas a la introducción temprana de fórmulas 298
4.5. Dificultades asociadas a la visualización 299
4.6. Dificultades asociadas a la linealidad 299
5. Enseñanza de las magnitudes y su medida 300
5.1. Tareas para percibir y comparar magnitudes 301
5.2. Tareas para aprender unidades y procedimientos de medida 303
5.3. Tareas para estimar 305

14. Enseñanza y aprendizaje de la razón y proporción. Porcentajes *(Isidoro Segovia Alex y Francisco Fernández García)* 307

1. Focos de contenido en la Educación Primaria 309
2. Objetivos de la enseñanza y competencias relacionadas 309
3. Dificultades y errores 311
3.1. Dificultades 311
3.2. Errores 312
4. Etapas del aprendizaje 313
5. Materiales y recursos de enseñanza 314
5.1. Recursos escolares 315
5.2. Recursos de la vida cotidiana 316
6. Tareas que promueven el aprendizaje 317
6.1. Tarea para el descubrimiento de la noción de razón y la comparación de razones 317
6.2. Tarea para encontrar el valor de π como razón 318
6.3. Tarea para identificar relaciones y constantes de proporcionalidad .. 318
6.4. Tarea para aprender a resolver problemas de proporcionalidad 318
6.5. Tarea para aprender el significado del porcentaje 319
7. Estrategias de enseñanza 319
7.1. Algoritmo versus métodos intuitivos 319
7.2. Porcentajes 320
8. Tareas de evaluación 321

15. Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad *(Rafael Bracho López, Manuel Torralbo Rodríguez, Natividad Adamuz Povedano y Noelia Jiménez Fanjul)* 323

1. Focos de contenido del tema en Educación Primaria 325
2. Objetivos de la enseñanza de la estadística y la probabilidad 325
3. Errores y dificultades en el aprendizaje de la estadística y la probabilidad .. 326
3.1. Errores en la recogida y organización de datos y en su representación gráfica 327
3.2. Errores en el manejo e interpretación de la media, mediana y moda 329
3.3. Errores en el análisis de la dispersión de los datos 330
3.4. Errores en los conceptos relacionados con el azar 331
4. Etapas del aprendizaje de la estadística y la probabilidad 332
5. Enseñanza de la estadística y la probabilidad 333
5.1. Estrategias de enseñanza 334
5.2. Materiales y recursos 334
5.3. Tareas que promueven el aprendizaje 337
5.4. Evaluación 341

© Ediciones Pirámide

Introducción

Este libro es continuación de otro, titulado *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* (Segovia y Rico, 2011), publicado por Ediciones Pirámide. Con este segundo libro proseguimos nuestra propuesta para la formación de los profesores de Primaria como maestros de matemáticas. El libro anterior lo dedicamos a planificar y presentar los conocimientos sobre matemáticas escolares que requiere un profesor de primaria, así como sus distintos bloques de contenidos, en términos de sus estructuras básicas, sus sistemas de representación y sus contextos y modos de uso. Es decir, hicimos una introducción sistemática de los significados de los conceptos convencionales y de las estructuras matemáticas en la Educación Primaria.

Este libro avanza en el conocimiento requerido por el profesor de matemáticas de Primaria para su trabajo, estando enfocado en el conocimiento didáctico sobre las matemáticas escolares.

Los autores hemos centrado nuestra propuesta en el desarrollo de conocimientos, el logro de capacidades y la mejora de actitudes relativas a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas escolares. Dicho de otro modo, hemos organizado y presentado modos de abordar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos escolares. Para ello hemos propuesto un marco estructurado general sobre el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, que hemos ejemplificado ampliamente.

El libro *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* se organiza en tres partes claramente diferenciadas. Una primera parte, dedicada a los fundamentos y cuestiones generales, se estructura en cuatro capítulos.

El primer capítulo presenta las expectativas de sus autores y establece ideas básicas acerca de las matemáticas escolares y el conocimiento del profesor, singularmente sobre su conocimiento didáctico. En esta perspectiva se sitúa nuestra propuesta para la formación del maestro de matemáticas, de su conocimiento y de las estrategias que se van a seguir para su logro.

Los capítulos segundo y tercero se dedican al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas escolares, respectivamente. En ambos casos se establecen las nociones básicas y conceptos con los que se organizan estas dos dimensiones del conocimiento didáctico del profesor. Nociones centrales son las de análisis cognitivo y análisis de instrucción, junto con sus organizadores. Las expectativas, limitaciones y oportunidades organizan el conocimiento sobre el aprendizaje matemático escolar. Las tareas, materiales, recursos y estrategias de enseñanza son otros tantos conocimientos sobre

© Ediciones Pirámide

instrucción matemática para el profesor en formación.

Esta primera parte proporciona referencias teóricas, técnicas y prácticas que estructuran y desarrollan esos componentes centrales, útiles para la organización de las otras dos partes. Un cuarto capítulo sirve de transición entre la primera y la segunda parte por su contenido transversal.

La segunda parte consta de otros cuatro capítulos, del quinto al octavo, que están centrados en el estudio del sentido matemático escolar para cada uno de los bloques de contenidos establecidos por el currículo para las matemáticas de Primaria: números y operaciones, geometría, la medida, estimación y cálculo, y tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Estos cuatro capítulos, con estilos diferentes, siguen un planteamiento compartido. En todos ellos se introduce una variante de la noción de sentido: sentido numérico, sentido espacial, sentido de la medida y sentido estocástico. En cada caso se caracteriza la singularidad del contenido matemático que se trabaja y de su sentido como parte del aprendizaje escolar. A su vez, se explica cómo entendemos dicho sentido y qué descriptores lo identifican. También se enumeran sus componentes, relaciones y capacidades que lo singularizan en cada caso. Cada capítulo describe el tratamiento curricular para uno de esos sentidos, las tareas y estrategias de enseñanza para su logro y su desarrollo. En cada caso hay una reflexión específica sobre el bloque de contenidos cuyo sentido se estudia. El desarrollo de las competencias escolares, junto con la alfabetización matemática, son hilo conductor de los cuatro capítulos.

La tercera parte, que abarca los capítulos 9 al 15, está dedicada a la enseñanza y aprendizaje de distintos conceptos y estructuras que destacan en el currículo de matemáticas de Primaria. Hay tres capítulos dedicados a temas del bloque de números: números naturales y enteros, estructuras aritméticas, y las fracciones y sus operaciones. Otro tema está dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Dos temas más se dedican a la enseñanza y aprendizaje de magnitudes: magnitudes y su medida, así como la razón, proporción y porcentajes. Finalmente, hay un último capítulo dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad.

También estos siete capítulos, si bien distintos en sus contenidos, en su extensión y parcialmente en su desarrollo, tienen una estructura compartida derivada de los planteamientos presentados en los tres primeros capítulos del libro. Todos los capítulos abordan los siguientes puntos: focos prioritarios del contenido curricular y secuencias de contenidos; objetivos y otras expectativas de aprendizaje; etapas en el aprendizaje de los contenidos, con aspectos singulares específicos en la mayoría de los temas; dificultades y errores en el aprendizaje; estrategias de enseñanza propias de los contenidos considerados; materiales y recursos; descripción de tareas para aprendizajes específicos; evaluación y tareas de evaluación. El capítulo 4 también se ajusta a este esquema.

La propuesta formativa que se hace al estudiante para maestro es amplia y diversificada. Ejemplifica detalladamente el marco conceptual establecido en los tres primeros capítulos, mostrando la utilidad de los organizadores curriculares sobre aprendizaje y enseñanza. Los conocimientos, capacidades y actitudes que se promueven desde un marco teórico, un uso técnico y una práctica profesional, contribuyen destacadamente a la formación del estudiante para Maestro de Primaria, como futuro profesor de matemáticas, y a su desarrollo profesional.

Granada, enero de 2015.

Los editores

© Ediciones Pirámide

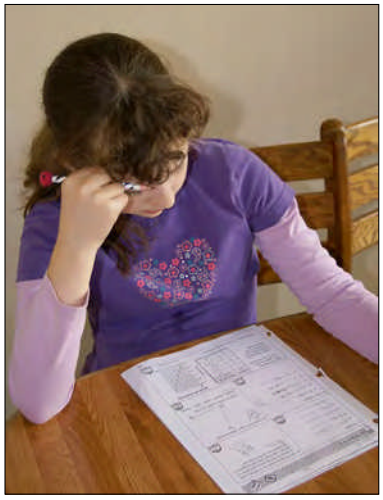
PARTE PRIMERA

Fundamentos y cuestiones generales

Matemáticas escolares y conocimiento didáctico

1

LUIS RICO ROMERO



Aprender matemáticas

Las personas necesitan del conocimiento matemático para desarrollar su intelecto y para desenvolverse en la sociedad.

Aprender matemáticas es una actividad usual para niños y jóvenes en nuestro sistema educativo. El conocimiento matemático contribuye a mejorar las capacidades de comunicación y a hacer el mundo inteligible.

Enseñar matemáticas

Enseñar matemáticas es una actividad profesional que ejercen los maestros y para cuya práctica son necesarios conocimientos matemáticos y conocimientos didácticos sólidos. La formación de los profesores de matemáticas se refleja en la preparación de sus alumnos. Mejorar la alfabetización matemática de una sociedad requiere la formación didáctica de sus maestros.

Este capítulo trata sobre las matemáticas escolares y sobre su aprendizaje y su enseñanza. El libro hace una contribución para precisar los conocimientos y capacidades didácticas que los estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria requieren para su formación como futuros profesores de matemáticas.

Ejercer como profesor de matemáticas en Educación Primaria precisa entender y dominar los contenidos matemáticos de estos niveles educativos.

© Ediciones Pirámide

También requiere, con igual precisión y dominio, de conocimientos didácticos sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares y sobre las estrategias para su organización y su enseñanza por parte de los profesores. Este capítulo aborda y trata aspectos generales de esas cuestiones.

Los autores de este libro aportan propuestas teóricas, técnicas y prácticas con las cuales formar a los estudiantes de magisterio y prepararlos como profesionales docentes desde una perspectiva específica, que se centra en la enseñanza y aprendizaje de los contenidos de las matemáticas escolares.

Introducimos nuestra propuesta de formación con un enfoque funcional, el cual permite modelar situaciones reales, plantear retos y abordar cuestiones en diferentes contextos para acometerlas mediante el análisis y la planificación.

Para ello, identificaremos problemas y necesidades sobre la enseñanza de las matemáticas escolares y sobre su aprendizaje; introduciremos conocimientos didácticos, teóricos y técnicos, con los cuales afrontaremos esos retos; trabajaremos para dar respuesta práctica a las cuestiones docentes mediante la aplicación de los conocimientos didácticos considerados; singularmente, haremos propuestas para la planificación y gestión del profesor mediante el análisis didáctico.

La figura 1.1 resume las relaciones entre los distintos apartados del capítulo.

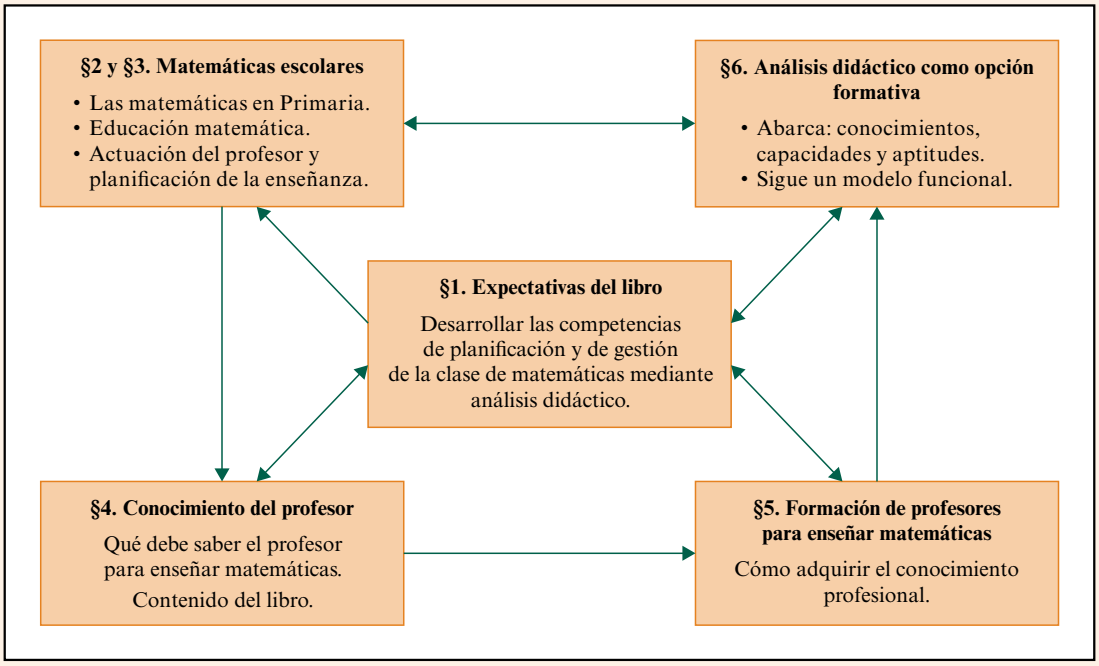


Figura 1.1.—Esquema del capítulo.

© Ediciones Pirámide

1. EXPECTATIVAS DE ESTE LIBRO

El propósito final de este libro es contribuir a una buena formación de maestros de Educación Primaria, específicamente de los maestros de matemáticas. Se centra en desarrollar el conocimiento, las capacidades y las actitudes didácticas de los futuros maestros. El logro de estas expectativas se precisa en unos objetivos generales y específicos, que se vinculan con las competencias profesionales establecidas para el graduado como maestro de Primaria.

1.1. Objetivos generales

El objetivo general de este manual consiste en promover y desarrollar en los maestros las competencias de planificación y de gestión del trabajo en el aula mediante el análisis didáctico, el diseño de tareas y su aportación al diseño de unidades didácticas de las matemáticas escolares.

Objetivos específicos para la formación de los maestros, que desglosan este objetivo general, son:

- Sistematizar y estructurar los procesos docentes mediante aquellos conocimientos didácticos que describen e interpretan el aprendizaje matemático y su enseñanza.
- Llevar a cabo el análisis didáctico en cada uno de los contenidos de las matemáticas escolares de la Educación Primaria, singularmente mediante el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.
- Desarrollar capacidades de observación, análisis, interpretación y valoración del aprendizaje escolar.
- Delimitar los procedimientos requeridos para el diseño de tareas, su secuenciación, la planificación de unidades didácticas y otras actuaciones relacionadas.
- Desarrollar capacidades para la gestión del trabajo en el aula de matemáticas y la orientación del aprendizaje de los escolares.
- Fomentar actitudes positivas hacia las matemáticas, útiles para planificar tareas y unidades didácticas.

ACTIVIDAD 1: Describe una actuación que tenga que realizar un profesor de matemáticas de Primaria que muestre el logro de algunos de esos objetivos.

© Ediciones Pirámide

1.2. Competencias profesionales

Mediante los objetivos enumerados nos proponemos promover y desarrollar en los futuros profesores competencias profesionales específicas, relativas a la planificación y a la gestión del trabajo en el aula para el logro del aprendizaje matemático de los escolares. Competencias que se sustentan en conocimientos matemáticos y conocimientos didácticos sobre los contenidos matemáticos, sobre su aprendizaje y su enseñanza, adecuados a los niveles de la Educación Primaria.

La formación como profesor de matemáticas requiere que los estudiantes de magisterio organicen y sistematicen sus conocimientos profesionales sobre la planificación de la enseñanza y sobre cómo impulsar el aprendizaje de las matemáticas por los escolares; también es necesario que los futuros docentes de matemáticas desarrollen y mejoren sus capacidades e induzcan actitudes positivas y eficaces hacia esta materia.

Para atender estos requerimientos, el futuro profesor de matemáticas de Primaria necesita de una formación centrada en las matemáticas escolares y en su didáctica. Esta necesidad viene recogida en las competencias específicas del Título de Maestro de Primaria que se establecen en el Anexo II de la Orden ECI/3857/2007 (MEC, 2007), las cuales, para el caso de las matemáticas, se desglosan en las siguientes competencias específicas de formación básica:

CDM 6.1. Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, de cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.).

CDM 6.2. Conocer el currículo escolar de matemáticas.

CDM 6.3. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.

CDM 6.4. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

CDM 6.5. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

CDM 6.6. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Cada uno de estos enunciados entreteje conocimientos, capacidades y actitudes básicas relativas a los contenidos de las matemáticas escolares y, también, al conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de esos contenidos. Así pues, expresan competencias profesionales para el maestro de matemáticas en Primaria.

La planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor, y también una de las menos desarrolladas en los planes de formación del profesorado. Esta competencia resulta especialmente importante para el profesorado de matemáticas, dadas las dificultades inherentes al aprendizaje y la complejidad de la enseñanza de esta materia. Las competencias enunciadas deben orientar la formación de los maestros en el medio y largo plazo. Los objetivos específicos establecidos contribuyen al logro de estas competencias.

ACTIVIDAD 2: Vincula las competencias específicas enunciadas con los objetivos anteriores, indicando qué objetivos pueden contribuir al logro de cada una.

2. SISTEMA EDUCATIVO Y MATEMÁTICAS ESCOLARES

Abordamos el estudio del conocimiento didáctico de las matemáticas escolares ampliando el conocimiento presentado en el libro *Mate-*

© Ediciones Pirámide

máticas para maestros de Educación Primaria (figura 1.2) con otros relativos al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas escolares. Para sistematizar estos nuevos conocimientos seguimos dos tipos de análisis, que llamamos análisis cognitivo y análisis de instrucción, respectivamente. Algunas de las ideas en que nos basamos, y que ahora se utilizan de nuevo, ya se presentaron y desarrollaron en el citado libro. Dado su interés, y la importancia que les atribuimos, revisamos algunas de ellas aquí, en este documento dirigido a la formación didáctica de los maestros de matemáticas.

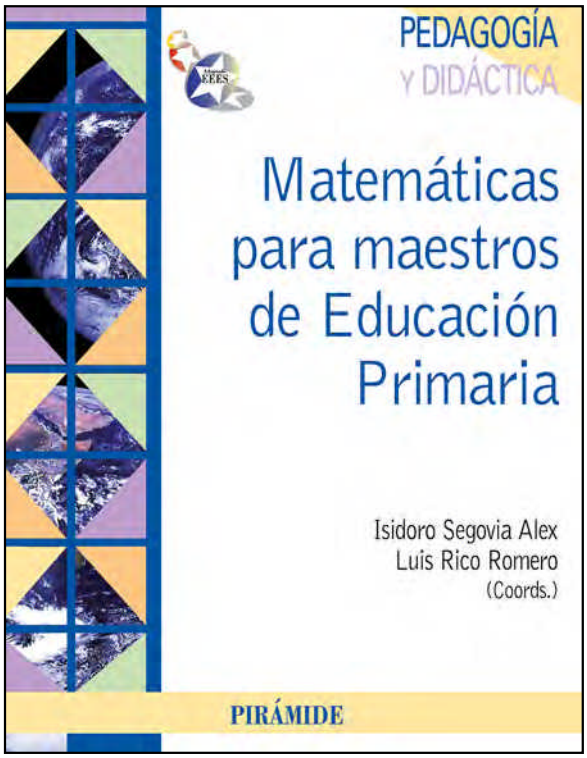


Figura 1.2

Consideramos educación aquella totalidad de actividades sociales mediante las que una generación transmite a las que le siguen el patrimonio cultural que comparten. En las sociedades modernas, parte importante de estas actividades se lleva a cabo mediante una institución social compleja, conocida como sistema educativo.

Esta organización social se ocupa de planificar, disponer, poner en práctica, gestionar, analizar procesos, valorar y optimizar, evaluar resultados, adoptar decisiones y todas aquellas otras funciones que surgen al considerar el proceso de enculturación social que promueve y dirige.

ACTIVIDAD 1: Destaca tres rasgos distintivos del sistema educativo en la sociedad española actual que no se puedan reconocer en la sociedad de hace un siglo.

2.1. Educación matemática

Por su naturaleza, por su interés para la sociedad y para la formación individual, las matemáticas son parte relevante del sistema educativo. «La matemática como expresión de la mente humana refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son la lógica y la intuición, el análisis y la construcción, la generalidad y la individualidad» (Courant y Robbins, 1996). La sociedad escoge todas esas facetas de las matemáticas y las emplea como objeto de educación.

Por educación matemática entendemos el conjunto de actividades y tareas que utilizan ideas, conocimientos y modos de pensar y de representar sostenidos por nociones matemáticas. Los sistemas educativos transmiten conocimientos matemáticos, y desarrollan modos específicos de comunicar, de razonar y argumentar que se identifican como pensamiento matemático. De este modo la sociedad se ocupa de educar matemáticamente a las nuevas gene-

© Ediciones Pirámide

raciones, les transmite las nociones básicas de la disciplina y promueve su desarrollo intelectual por medio de la reflexión matemática.

ACTIVIDAD 2: Identifica diez momentos de la vida cotidiana de un ciudadano en los que debe hacer uso de sus conocimientos matemáticos.

El sistema educativo transmite contenidos matemáticos, considerados como sistemas de conceptos, procedimientos y actitudes. Los conceptos son aquellas ideas con las que pensamos; los procedimientos son los modos y técnicas con que se procesan y usan dichas ideas; las actitudes se entienden como una predisposición aprendida de los estudiantes para responder a las matemáticas de manera positiva o negativa, lo cual influye en su relación con la materia y en su comportamiento ante ella. Cuando examinamos los contenidos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje, hablamos de matemáticas escolares.

ACTIVIDAD 3: Elabora una lista de conocimientos matemáticos escolares que consideres de utilidad práctica.

Las matemáticas son parte constitutiva del patrimonio cultural de una sociedad, resultado de la actividad social. Por ello, los sistemas educativos se ocupan de la educación matemática, es decir, de la transmisión del conocimiento matemático, de sus nociones y procedimientos que son útiles y necesarios.

2.2. Matemáticas en el currículo

Las matemáticas forman parte del currículo de todos los cursos de la educación obligatoria. Su consideración, funciones y finalidades quedan así descritos.

> «Se entienden las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, hacerse preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad se puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas. Concebidas de esta forma, las matemáticas incorporan las características que les han sido tradicionalmente asignadas y que se identifican con la deducción, la precisión, el rigor, la seguridad, etc. También son inducción, estimación, aproximación, probabilidad y tentativa y la capacidad de enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada. Todo ello se refleja en la doble función que se viene dando al aprendizaje escolar de las matemáticas: se aprenden matemáticas porque son útiles en otros ámbitos (en la vida cotidiana, en el mundo laboral, para aprender otras cosas...), y también por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, en concreto destrezas susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen por sí mismas a potenciar capacidades cognitivas de niños y niñas» (MEC, 2007).

Al establecer estas prioridades es claro que el conocimiento matemático escolar no se limita a su expresión como disciplina formal, organizado deductivamente, sostenido en sistemas estructurados de signos y formas. Las matemáticas son constitutivas de la vida social y parte del patrimonio cultural. Por ello las concebimos como un modo de pensar, entender y actuar en el mundo, trabajando con la cantidad, la forma, el tamaño, la regularidad, la estructura y el cambio.

Las consideramos como un modo específico, abierto y flexible, para sistematizar las relaciones e inferir otras nuevas entre hechos, datos,

© Ediciones Pirámide

figuras o enunciados. Su método está basado en la abstracción, la precisión y el rigor, método apropiado para hacer el mundo inteligible. Estas ideas establecen una noción de currículo que se viene desarrollando desde hace tiempo.

ACTIVIDAD 4: Destaca tres rasgos distintivos de las matemáticas en el actual sistema educativo que no se pudieran reconocer en la sociedad española del siglo pasado.

3. FINES EDUCATIVOS Y PLANES DE FORMACIÓN

Al ser parte relevante de la educación que comparten los ciudadanos de una sociedad moderna y avanzada, las matemáticas forman parte del sistema educativo.

3.1. Fines de la educación matemática

Como servicio público, el sistema educativo está delimitado por sus principios y determinado mediante sus fines. El rango normativo de principios y fines viene reconocido en los primeros artículos de las leyes educativas. El currículo de las matemáticas escolares está, igualmente, subordinado a los fines y principios generales del sistema educativo.

ACTIVIDAD 1: Busca en la actual ley de educación los fines generales establecidos para la educación. Revisa sus enunciados y establece su vinculación con la educación matemática en Primaria.

Una vez establecido el objeto de la educación mediante sus finalidades, la normativa legal presenta la estructura del sistema educativo mediante la noción de currículo. El sistema educativo se ordena mediante etapas y ciclos, cursos y niveles. Su organización se relaciona con la edad escolar y con los tipos de formación que, en cada caso, se consideran. Los fines de la educación, junto con el marco curricular, son dos sistemas relacionados y determinantes en la reflexión educativa, que organizan cualquier disciplina escolar.

Cuando los procesos educativos tienen como objeto el conocimiento y uso de las matemáticas, o como contenido cualquier concepto matemático, se habla de educación matemática. Justificamos ya en el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* que se pueden distinguir cuatro tipos de finalidades para la educación matemática: conceptuales, cognitivas, normativas y sociales. Los fines de la educación matemática son aquellas razones o propósitos generales que dan respuesta a la cuestión «¿por qué enseñar matemáticas?».

ACTIVIDAD 2: Enuncia varios tipos de finalidades para la educación matemática, uno por cada tipo mencionado.

3.2. Currículo de matemáticas

Por currículo venimos considerando cualquier propuesta organizada para planificar y poner en práctica un modo de formación. Consideramos como aspectos ineludibles para caracterizar cualquier plan de formación: los sujetos que se forman, el tipo de formación que se les proporciona, las finalidades de esa formación, la institución que la lleva a cabo y los sistemas de evaluación y control que la regulan.

ACTIVIDAD 3: Describe brevemente el currículo de matemáticas de Primaria, en términos de los componentes antes enumerados.

© Ediciones Pirámide

Los fines de la educación matemática orientan la reflexión sobre el currículo de matemáticas. Un plan de formación considera cuatro tipos de finalidades: conceptual, cognitiva, normativa y social (figura 1.3).

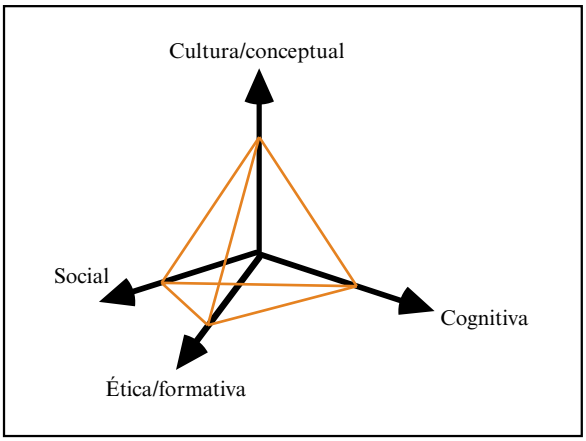


Figura 1.3.—Dimensiones del currículo.

Las dimensiones de un currículo se establecen a partir de los cuatro tipos de finalidades mencionadas. Las dimensiones se reconocen porque atienden y dan respuesta a cuatro cuestiones generales: ¿qué conocimiento?, ¿para qué esos conocimientos?, ¿cómo y de qué manera se lleva a cabo la formación?, ¿qué logros se alcanzaron?

Usualmente, como plan de formación institucional, un currículo de matemáticas se regula dando respuestas prácticas a las cuatro cuestiones anteriores. Para ello, un currículo de matemáticas delimita y enumera los contenidos matemáticos escolares considerados, enuncia mediante objetivos las expectativas sobre el aprendizaje escolar, describe una metodología con la que se organiza y regula el trabajo en el aula y proporciona unos criterios para evaluar los logros alcanzados sobre el aprendizaje de los escolares.

ACTIVIDAD 4: Identifica en el actual currículo de matemáticas de Educación Primaria alguna respuesta a cada una de las cuatro cuestiones: ¿qué conocimiento?, ¿para qué esos conocimientos?, ¿cómo llevar a cabo la formación?, ¿cómo valorar los logros?

La educación matemática establece las finalidades que deben orientar la acción del profesor, dando respuesta a los porqués de la actividad formativa. El currículo sistematiza un marco de trabajo para los escolares. Este marco proporciona una estructura mediante la cual el profesor de Primaria puede abordar su trabajo profesional como educador en matemáticas.

3.3. Planificación del currículo

El equipo de profesores debe dar concreción al marco general anterior. Para que los profesores puedan llevar a cabo su trabajo profesional como docentes es necesario que planifiquen su trabajo y contemplen sus tareas como una totalidad. Planificar es un trabajo de equipo; para su realización conviene tener en cuenta las cuatro cuestiones centrales antes descritas. Planificar el trabajo para el aula de matemáticas requiere delimitar y precisar colegiadamente los contenidos con los que se quiere llevar a cabo la formación y sus significados, prever el tipo aprendizaje que se quiere que alcancen los escolares, diseñar un plan completo de actuación para el logro de los aprendizajes esperados y establecer un sistema de evaluación sobre el alcance de dichos logros.

ACTIVIDAD 5: Razona cuál de esas cuestiones presenta mayor dificultad para su elaboración en equipo.

© Ediciones Pirámide

Entre una aproximación teórica al currículo, otra técnica o bien una aproximación práctica, hay disparidades y diferencias. La tensión entre organización teórica, su implementación técnica y su puesta en práctica centra la discusión sobre las funciones educativas de la noción de currículo. Para nosotros es una cuestión clave proporcionar a los profesores herramientas conceptuales bien construidas y funcionalmente potentes con las que mejorar su formación. También lo es suministrarles un marco adecuado para planificar, en primer término, hacer un diseño técnico y ponerlo en práctica en el aula de matemáticas. Los conocimientos didácticos que apoyen las actuaciones y toma de decisiones para la formación de los escolares deben tener fundamentación adecuada.

Estas herramientas deben proporcionar autonomía intelectual para facilitar la gestión de la complejidad de los problemas derivados de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Un marco teórico curricular, entendido como plan de formación para atender a los cuatro tipos de finalidades que den respuesta a las cuatro cuestiones enunciadas, es un instrumento de trabajo sólido, útil y práctico para el profesor de matemáticas de cualquier nivel educativo. La metodología del análisis didáctico, basada en los mismos principios, contribuye al logro de estos propósitos.

ACTIVIDAD 6: Argumenta por qué los conocimientos didácticos del profesor deben estar bien definidos.

4. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Para describir el conocimiento del profesor de matemáticas los expertos identifican dos grandes campos generales, campos que aquí vamos a denominar *conocimiento del contenido matemático escolar* y *conocimiento didáctico de las matemáticas escolares*. Estos dos campos ayudan a clasificar distintas variedades de conocimiento que se requieren para formar profesores y que se reconocen al observar el trabajo de los profesores en ejercicio.

ACTIVIDAD 1: Elegimos como ejemplo el contenido «Sistema decimal de numeración», que se encuentra en los programas de matemáticas escolares. Describe brevemente tu conocimiento sobre este contenido. Describe también un conocimiento didáctico relativo al mismo contenido.

4.1. Contenidos matemáticos escolares

En el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* hicimos una amplia reflexión del primero de los campos mencionados, el *conocimiento del contenido matemático escolar*. Este curso iniciamos un estudio sistemático del segundo de ellos. Objetivo de aquel libro era «aportar conocimientos, estrategias y habilidades útiles para el desarrollo y logro de distintas competencias profesionales, singularmente las competencias de planificación del currículo de matemáticas». Su propuesta consistió en estudiar los contenidos de las matemáticas escolares, lo cual realizamos desde una perspectiva específica, como conocimiento del futuro profesor, que sirviera para iniciar su reflexión didáctica.

En el medio escolar se pueden presentar y organizar los contenidos matemáticos de varios modos. Hay un planteamiento tradicional que aborda los contenidos matemáticos desde un punto de vista disciplinar y los sistematiza por materias: Aritmética, Geometría, Magnitudes, Álgebra, Estadística y otros. Cada una de estas materias se concreta en uno o varios bloques de

© Ediciones Pirámide

contenidos, a su vez divididos en apartados, los cuales ordenan las matemáticas escolares utilizando la estructura disciplinar de la matemática y siguen su método usual de trabajo.

ACTIVIDAD 2: Identifica los bloques y apartados disciplinares de los contenidos del currículo de matemáticas para Educación Primaria. Ubica el bloque y apartado del contenido «Sistema decimal de numeración», escogido en la actividad 1.

También sabemos que los contenidos matemáticos se pueden describir desde una perspectiva cognitiva, en cuyo caso se tipifican como *conceptuales, procedimentales* y *actitudinales,* dando lugar a una organización cognitiva de los contenidos matemáticos, con la que ya hemos trabajado.

ACTIVIDAD 3: Enumera tres contenidos conceptuales, tres procedimentales y tres actitudinales que se localicen en el currículo de matemáticas para Educación Primaria. Describe los conceptos y procedimientos del tópico «Sistema decimal de numeración».

Cuando enumeramos los términos, notaciones, convenios y resultados de una determinada noción matemática, cuando se procesan esos hechos mediante reglas y destrezas específicas, cuando se definen y caracterizan determinados conceptos, o bien cuando los relacionamos mediante procedimientos de prueba y argumentos de demostración, cuando vinculamos conceptos y los organizamos en estructuras, cuando establecemos redes conectando diferentes conceptos, generamos nuevos procedimientos y elaboramos distintas estrategias para identificar y resolver problemas o hacemos una reflexión meta cognitiva, estamos trabajando en un marco cognitivo, ya que consideramos los contenidos matemáticos como modos de pensar y esquemas de razonamiento, como herramientas vinculadas al aprendizaje de los escolares.

La organización cognitiva de los contenidos matemáticos escolares es importante para el profesor, ya que le permite reflexionar sobre esos contenidos como modos específicos de conocer, como objetos de aprendizaje escolar.

ACTIVIDAD 4: Describe la organización cognitiva del contenido «Sistema decimal de numeración».

Estas opciones no agotan los modos de caracterizar los contenidos matemáticos escolares. Según los fines que se pretendan, también hay otros criterios que dan lugar a modos distintos de organización. Así ocurre en el caso del estudio internacional PISA de la OCDE, conocido por la repercusión e impacto de sus resultados. Este estudio evalúa las competencias de los escolares al término de la Educación Secundaria Obligatoria, entre las cuales destaca la competencia matemática. Para llevar a cabo sus evaluaciones, el estudio PISA clasifica los contenidos matemáticos escolares según su relación con los fenómenos y el tipo de problemas para cuya resolución los contenidos fueron elaborados. Los expertos del estudio PISA consideran cuatro tipos de contenidos, según el modo en que se presentan en las tareas de las matemáticas escolares. Según este criterio, dichos tipos son: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre y datos.

ACTIVIDAD 5: Localiza algunos ítems de evaluación que sigan el modelo del estudio PISA. Identifica en cada uno de ellos el tipo de contenido según la clasificación anterior.

© Ediciones Pirámide

Todas estas aproximaciones son compatibles, ya que dan respuesta a distintas cuestiones. Unas proporcionan criterios para sistematizar y profundizar en el contenido matemático propiamente dicho, según se organiza por la disciplina. Otras contribuyen a iniciar el estudio de los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje y de enseñanza. Unas terceras atienden a los modos de uso de esos contenidos. Cada una de ellas aporta una aproximación diferente a los contenidos matemáticos escolares, que resulta útil y conveniente para el profesor en formación.

ACTIVIDAD 6: Revisa las caracterizaciones presentadas para estudiar el conocimiento del contenido matemático y destaca algunas diferencias relevantes entre ellas.

4.2. Conocimiento sobre el contenido matemático

En el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* comenzamos el análisis didáctico con el análisis sobre los contenidos de las matemáticas escolares.

El modelo escogido para que los profesores inicien ese análisis consiste en el estudio de los significados de los conceptos de las matemáticas escolares y en los procesos para su comunicación.

El *conocimiento sobre un contenido* por parte del profesor consiste en el dominio de sus significados matemáticos básicos, necesarios para su trabajo profesional. Estos significados los establecemos mediante la terna definición-representación-sentido. Argumentamos que el profesor en formación se hace experto sobre un contenido de las matemáticas escolares conforme domina la pluralidad de sus significados y aprende a comunicarlos.

«Este conocimiento se logra mediante el estudio de las estructuras conceptuales en las que cada uno de los conceptos se inserta, por la determinación de los sistemas de representación mediante los cuales esos conceptos se expresan, y también por la delimitación y conocimiento de las cuestiones para cuya respuesta tales conceptos fueron construidos, los cuales vienen acotados, a su vez, por los campos en que se utilizan como herramientas para plantear y resolver problemas».

ACTIVIDAD 7: Haz un resumen de los conceptos básicos de matemáticas escolares seleccionados en la actividad 1. Discute tu propuesta con tus compañeros.

Conocer un concepto matemático es conocer su definición, mostrar sus propiedades y utilizarlo en la resolución de problemas. Este nivel marca el aprendizaje que deben lograr los escolares en el sistema educativo. Conocer el significado de un concepto matemático plantea una perspectiva más compleja, pues requiere verlo como parte de una estructura, conocer sus diferentes modos de representación y las facetas que cada uno de ellos aborda, así como entender los distintos usos y sentidos con que se emplea. Este nivel de dominio marca el conocimiento del profesor sobre un contenido matemático.

ACTIVIDAD 8: Ejemplifica el conocimiento matemático sobre la suma y los significados de la suma que necesita conocer un profesor.

«El análisis de contenido es la herramienta técnica con la que se establecen y estudian la diversidad de significados de los conocimientos en los temas de las matemáticas escolares. Mediante este análisis se desarrollan las capacida-

© Ediciones Pirámide

des del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para planificar y orientar el aprendizaje de los escolares de Primaria».

Parte importante del trabajo del profesor en formación está dedicado a construir su conocimiento sobre el contenido matemático, es decir, al estudio de los significados de los conceptos y estructuras de las matemáticas escolares de Primaria, para lo cual ha de llevar a cabo un análisis de contenido de cada uno de ellos. Por tanto, la formación como profesores requiere tiempo para mejorar los conocimientos sobre el contenido. Los profesores en formación han de construir su conocimiento en cada caso, profundizando en sus significados mediante el análisis de contenido.

ACTIVIDAD 9: Rememora y describe qué nuevos aspectos de la suma de números naturales aprendiste en el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*.

4.3. Conocimiento didáctico del contenido

Este libro está escrito para introducir de manera sistemática aquellos conocimientos —teóricos, técnicos y prácticos— sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, que son propios para la formación de un maestro. Estos conocimientos los llamamos *conocimientos didácticos de las matemáticas escolares.* En cada caso el maestro en formación deberá conocer, entender y utilizar, singularmente, el *conocimiento didáctico sobre cada contenido* matemático.

Los conocimientos que vamos a manejar son aquellos necesarios para avanzar en el dominio didáctico de las matemáticas de Primaria. Después de haber trabajado en el contenido nos vamos a centrar ahora en los conocimientos relativos al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas escolares. Son conocimientos requeridos para comprender la complejidad de la enseñanza y del aprendizaje matemático escolar, para planificar ese aprendizaje y tomar decisiones técnicas que lo faciliten, para gestionar, aplicar y poner en práctica sus consecuencias. Se trata de conocimientos necesarios, conocimientos que resultan de un análisis cognitivo y de un análisis de instrucción de las matemáticas escolares.

ACTIVIDAD 10: Enumera conceptos y procedimientos que muestren el dominio sobre el contenido «Suma de números naturales». Describe otros conocimientos que muestren el dominio didáctico sobre ese mismo contenido. Destaca algunas diferencias entre ambos tipos de conocimientos.

Posteriormente nos ocuparemos de los conocimientos necesarios para evaluar el dominio de los contenidos matemáticos. Éste, que estudiaremos más adelante, también forma parte del conocimiento didáctico y es objeto del análisis de resultados o análisis evaluativo.

El conocimiento didáctico sobre un contenido concreto de las matemáticas escolares se inicia con el dominio de su contenido. En nuestra propuesta, consta también del conocimiento sobre su aprendizaje, sobre su enseñanza y sobre su evaluación.

Estos conocimientos contribuyen al desarrollo de aquellas capacidades didácticas de los profesores en formación, requeridas para fundamentar propuestas técnicas que los desarrollen y decisiones sobre actividades para ponerlos en práctica. Entre esas propuestas y actividades didácticas destacan el diseño de tareas matemáticas escolares, la gestión del aprendizaje de los

© Ediciones Pirámide

escolares, la secuenciación de tareas y la planificación de unidades didácticas orientadas a dicho aprendizaje.

ACTIVIDAD 11: Describe alguna capacidad didáctica del profesor de matemáticas, conveniente para promover el aprendizaje escolar.

A su vez, consideraremos criterios con los cuales los profesores en formación profundizan en sus juicios y valoraciones sobre los procesos de aprendizaje y sobre los logros mediante las secuencias de enseñanza.

4.4. Conocimiento didáctico y competencias del profesor

Los conocimientos, capacidades y actitudes didácticas promueven las competencias profesionales de los maestros de matemáticas y son necesarios para su desarrollo. A su consecución va dirigido este libro.

Las competencias didácticas del profesor de matemáticas han sido objeto de estudio cuidadoso por los expertos desde hace tiempo, como vemos en la siguiente reflexión:

> «Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las sugerencias que estimo fundamentales:
>
> I. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
> II. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
> III. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
> IV. Guardar cuidadosamente los planos de abstracción.
> V. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
> VI. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
> VII. Promover en todo lo posible la autocorrección.
> VIII. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
> IX. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
> X. Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento» (Puig Adam, 1960).

ACTIVIDAD 12: Identifica en estos enunciados cuáles se refieren a conocimientos, cuáles a capacidades y cuáles a actitudes del profesor.

Nuestro trabajo en este momento, como profesores en formación, consiste en establecer el conocimiento didáctico de un contenido matemático mediante su análisis cognitivo y su análisis de instrucción, partiendo del conocimiento sobre el propio contenido.

5. SISTEMA EDUCATIVO Y FORMACIÓN DE PROFESORES

El sistema educativo establece y regula el aprendizaje matemático de los escolares. También prescribe y organiza la formación inicial de los profesores como profesionales de la educación en sus áreas de especialización. La normativa del sistema educativo establece que el ejercicio de la profesión de maestro en Educación Primaria, como profesión regulada, requiere estar en posesión del correspondiente título oficial de grado.

© Ediciones Pirámide

Los graduados que sigan los planes formativos para ser maestros de Primaria deberán desarrollar, entre otras, las siguientes competencias generales:

1. Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
2. Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
3. Abordar con eficacia situaciones de aprendizaje de lenguas en contextos multiculturales y plurilingües. Fomentar la lectura y el comentario crítico de textos de los diversos dominios científicos y culturales contenidos en el currículo escolar.
4. Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.

Estas cuatro competencias (dominio del conocimiento disciplinar, diseño y planificación, comunicación y argumentación, y gestión del aprendizaje) son centrales en la formación inicial del profesor de matemáticas, singularmente para la formación del maestro de Primaria. Como hemos visto para las matemáticas escolares, adquirir el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido contribuirá a desarrollar estas competencias.

ACTIVIDAD 1: Justifica brevemente la importancia de cada una de estas cuatro competencias para enseñar matemáticas por parte del profesor.

Las competencias mencionadas comprenden conocimientos, capacidades y actitudes. Además de esas competencias generales, la organización por módulos del plan de formación para maestros de Primaria establece un módulo de matemáticas, cuyos contenidos concretan los conocimientos, capacidades y actitudes didácticas necesarias para esa formación. Las competencias del módulo de matemáticas profundizan y detallan algunas cuestiones de las cuatro competencias generales descritas, sobre las que nos centramos.

Subrayamos que el sistema educativo asigna al maestro, entre otras, las funciones de promover, orientar y dirigir el aprendizaje matemático de los escolares, actividades que se concretan en las competencias profesionales de planificar y de gestionar el trabajo en el aula de matemáticas. Este libro se propone contribuir al logro de esas competencias, desarrollando el conocimiento didáctico de los profesores en formación.

El conocimiento didáctico sobre un contenido matemático es conocimiento necesario para desarrollar las competencias específicas del maestro como profesor de matemáticas.

ACTIVIDAD 2: Haz un esquema que resuma las ideas de este apartado. Discute en grupo con tus compañeros los esquemas elaborados.

5.1. Formación del maestro de matemáticas

Las matemáticas escolares, es decir, los conocimientos matemáticos considerados como objeto de enseñanza y aprendizaje, constituyen

© Ediciones Pirámide

un campo de trabajo profesional del maestro de Primaria. Es tarea profesional de éste enseñar matemáticas a los alumnos para que éstos las aprendan, es decir, para que construyan y utilicen sus propios significados sobre los contenidos de las matemáticas escolares.

Como hemos dicho, en la formación inicial de los maestros de Educación Primaria los conceptos de educación matemática, matemáticas escolares y currículo de matemática constituyen nociones centrales para su preparación como profesores de matemáticas. Las dimensiones del currículo de matemáticas proporcionan fundamento para abordar y centrarse en el estudio de las matemáticas escolares. Hemos argumentado también que el conocimiento del maestro de matemáticas se organiza en dos campos: conocimiento del contenido matemático y conocimiento didáctico del contenido.

El método del análisis didáctico lo introducimos e iniciamos el pasado curso mediante el análisis de contenido. Las técnicas que estudiamos entonces, que brevemente vamos a revisar, constituyen la base del método, organizan los conocimientos centrales sobre el contenido y sus capacidades asociadas.

Resumiendo, el conocimiento didáctico sobre un contenido escolar consta del conocimiento sobre su contenido, del conocimiento sobre su aprendizaje, del conocimiento sobre su enseñanza y del conocimiento sobre su evaluación.

Mediante el análisis didáctico, es decir, mediante el análisis del contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo, construimos el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares.

5.2. Análisis del contenido

Como se ha dicho, la delimitación y precisión en los contenidos matemáticos es de singular importancia en la Educación Primaria. El conocimiento del profesor de matemáticas comienza y se sustenta sobre su conocimiento del contenido.

De acuerdo con los programas escolares de matemáticas, los contenidos hay que situarlos en su contexto cultural y social, considerarlos en su evolución histórica. Para llevar a cabo esta concreción curricular, el profesor de matemáticas debe conocer las raíces y el significado matemático usual de los conceptos básicos que utiliza, la estructura en que se ubican, los sistemas de representación mediante los que se expresan y transmiten, los fenómenos de los que proceden y los contextos en que se localizan.

El significado de los conceptos, estructuras y procedimientos matemáticos son parte relevante del conocimiento que el profesor de matemáticas debe alcanzar sobre los contenidos escolares. Esta formación se lleva a cabo mediante el análisis de contenido de los conceptos matemáticos, con el cual se inicia el análisis didáctico. El análisis sobre el contenido lo entendemos como un método integrado por diversas técnicas que establecen y estudian la diversidad de significados de los tópicos de las matemáticas escolares.

Entre los conocimientos y capacidades del análisis de contenido, distinguimos:

- Las definiciones, relaciones, tipos de conocimientos, propiedades y demostraciones que organizan y estructuran cada contenido matemático.
- Los problemas que se abordan y resuelven mediante cada estructura conceptual y las líneas de trabajo que pueden abordarse a partir de ella.
- Los sistemas de representación con que se expresan los conceptos y se regulan los procedimientos.
- El análisis, la revisión, ejemplificación y organización de los fenómenos vinculados.

© Ediciones Pirámide

- El desarrollo histórico de los conceptos y estructuras estudiados.
- Los usos sociales que tiene cada concepto en cuestión, los contextos en que se utilizan y que les dan sentido.
- La organización de conocimientos, transmisión de información y justificación de inferencias que se consiguen mediante empleo de sus técnicas y conceptos.

Por cada uno de los contenidos en el currículo, como primer paso en su análisis didáctico, hay que llevar a cabo su análisis de contenido y contemplar los puntos antes señalados. Mediante este ejercicio de análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer los diversos significados de las matemáticas escolares.

ACTIVIDAD 3: Ejemplifica para el concepto de número natural algunos de los conocimientos y capacidades del profesor que se derivan de este análisis de contenido.

Los conocimientos y capacidades enumerados son necesarios para que el profesor abarque los conceptos y procedimientos de los temas matemáticos en estudio, organice las relaciones diversas en una estructura matemática y establezca focos prioritarios a partir de los cuales abordar el aprendizaje de los alumnos de Primaria.

El análisis de contenido contribuye destacadamente al desarrollo de las competencias profesionales del profesor de Primaria, singularmente aquellas vinculadas con las competencias relativas al dominio de los contenidos curriculares.

La primera competencia del profesor de matemáticas es dominar los conocimientos matemáticos que debe enseñar. Aunque dedicamos el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* a profundizar en esta competencia, entendemos que su incentivación y desarrollo debe mantenerse durante todo el período de formación inicial, al tratarse de una expectativa de aprendizaje a término del ciclo formativo que supone todo el título de grado.

6. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y MÉTODO DE ANÁLISIS

La formación del profesor no concluye cuando alcanza un dominio personal avanzado de los conceptos y de las estructuras matemáticas, de sus significados, de su riqueza y diversidad. El conocimiento sobre el contenido no agota, sino que inicia, el camino hacia una comprensión profunda de las cuestiones didácticas que el profesor de matemáticas debe abordar en su trabajo. Dicho conocimiento es sólo un primer paso para el desarrollo de sus capacidades y conocimientos didácticos.

El avance en el conocimiento didáctico se lleva a cabo mediante un proceso de análisis y síntesis didáctica con tres referentes principales: el contenido matemático, el alumno que aprende y el profesor que enseña. Por tanto, el libro sirve de ayuda, pero el maestro en formación tiene que analizar contenidos más concretos de las matemáticas de Primaria en situaciones más precisas, como «la primera decena», en primer curso, «los problemas aditivos», en segundo, y así sucesivamente.

6.1. Planificación docente

El profesor concluye su trabajo de análisis sobre un contenido matemático mediante una síntesis. Después del trabajo detallado sobre los significados de ese contenido, sobre sus com-

© Ediciones Pirámide

ponentes estructurales, sistemas de representación y modos de uso, es necesario optar por cuáles de ellos van a tener prioridad como objetos de aprendizaje y enseñanza. La síntesis se realiza mediante la elección de los focos preferentes del contenido matemático escolar que el profesor va a considerar en su planificación docente para un tema concreto en un nivel determinado.

ACTIVIDAD 1: Con ayuda de un libro de texto, escoge un nivel escolar y un tema que se trate en ese nivel. Identifica los focos preferentes con los cuales el libro organiza el trabajo sobre ese contenido. Revisa y comenta esos focos.

Se pueden utilizar distintas técnicas para llevar a cabo la síntesis del contenido. Una técnica usual consiste en construir un mapa conceptual con el que mostrar los principales datos considerados en el análisis del contenido y sus relaciones. Otra consiste en hacer un breve resumen o esquema de las reflexiones realizadas. En cualquier caso, hay que optar y establecer los focos preferentes del contenido matemático escolar, para que el profesor pueda avanzar en su planificación docente.

ACTIVIDAD 2: Elabora un mapa conceptual o un esquema que resuma las principales ideas del tema elegido en la actividad 1. Identifica en ese esquema los focos preferentes establecidos para este tema y en ese nivel.

La planificación de los aprendizajes escolares vinculados con un contenido se inicia al establecer los focos preferentes del contenido que contribuyen a enunciar las prioridades de aprendizaje. Los focos preferentes ayudan al enunciado general de los aprendizajes deseados sobre un contenido.

ACTIVIDAD 3: Para cada uno de los focos identificados en la actividad 2, enuncia y redacta prioridades que se puedan considerar para su aprendizaje.

Los currículos oficiales y los programas de las disciplinas que los documentos oficiales publican también aportan información pertinente con la cual continuar la planificación del aprendizaje escolar. Estas normas y orientaciones generales guían la toma de decisiones adecuadas para llegar al nivel del aula, delimitan qué debe aprender un alumno o alumna sobre cada tema y cómo hacerlo operativo. Por estas razones estos documentos deben tenerse en cuenta para revisar y matizar el enunciado de las prioridades en el aprendizaje de un tema.

ACTIVIDAD 4: Revisa los enunciados redactados en la actividad 3, considerando los objetivos generales de matemáticas para Primaria.

6.2. Libros de texto y análisis didáctico

Los libros de texto escolares que publican las editoriales, y su complemento en forma de libro del profesor, ocupan un espacio intermedio entre la programación general y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que abordan cuestiones directas, tales como: ¿qué contenidos sobre este tema trabajar con mis alumnos?, ¿qué expectativas puedo tener respecto a su aprendizaje?, ¿cómo seleccionar y estructurar las clases para alcanzar las expectativas previstas?

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 5: Identifica en el mismo libro de texto que has utilizado en la actividad 1 alguna de las cuestiones recién enunciadas. Localiza también esas cuestiones en el libro del profesor correspondiente. Valora el tratamiento y la respuesta que reciben.

Los libros de texto son útiles, porque proporcionan al profesor un primer resultado, un avance de análisis didáctico previamente realizado por expertos. Son una primera aproximación al conocimiento didáctico, si bien insuficiente. Los libros de texto se redactan para perfiles muy generales de alumnos y profesores, que no coinciden con la realidad de cada centro y aula. La información que contienen, las estrategias didácticas con que organizan los contenidos, la selección de tareas que realizan y la limitación de recursos que suponen, son una ayuda para que el profesor utilice el libro de texto como apoyo a su trabajo en el aula, pero no como guía de actuación didáctica para dirigir el trabajo cotidiano de modo prescriptivo, para sustituir la reflexión personal y colegiada.

ACTIVIDAD 6: Haz un listado de puntos fuertes y débiles del conocimiento didáctico que aporta el libro de texto sobre el tema que vienes trabajando.

El análisis didáctico es una actividad necesaria para el profesor de matemáticas en formación, ya que proporciona los conocimientos necesarios con los cuales avanzar más allá del dominio de los contenidos, de la normativa curricular institucional y de la propuesta concreta de un libro de texto u otro material escolar. También el análisis didáctico contribuye a clarificar decisiones adoptadas y permite revisarlas en cursos posteriores, compartirlas con compañeros o abrir nuevas líneas de trabajo.

El libro de texto es un primer avance de análisis didáctico que ayuda al profesor en su trabajo de planificación, ofrece ejemplos, propuestas de trabajo y muestra diversas aproximaciones que son útiles como materiales de reflexión.

6.3. Conocimiento didáctico sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

Objetivo central de la formación del profesorado para este curso consiste en promover la competencia en el diseño y la planificación de actividades para el aprendizaje por parte de los escolares y para la enseñanza de los conceptos matemáticos considerados en el currículo de Primaria. Como hemos argumentado, el análisis de contenido, por sí solo, no resuelve las tensiones que se generan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

En sus tareas de planificación, el profesor de Primaria tiene que considerar el trabajo y la acción del escolar aprendiz y su propia acción y trabajo. Es una relación con dos protagonistas, el estudiante que aprende y el profesor que enseña, en la cual hay que buscar una estrecha colaboración para que ese aprendizaje se produzca y sea exitoso. Esta cooperación es compleja y desigual, ya que requiere de uno de sus actores, el profesor novel, que conozca sus claves y las interprete para dirigir un proceso cuyos dos personajes son inexpertos. Por ello mismo, la reflexión sobre las condiciones y modos de atender estas relaciones es obligada para el profesor.

ACTIVIDAD 7: Por un ejemplo de conocimiento didáctico específico relativo al contenido concreto del currículo de matemáticas que vienes considerando.

© Ediciones Pirámide

La visión coordinada de los requerimientos para incentivar y provocar el aprendizaje de cada escolar, de los requisitos para promover la atribución de significados compartidos en un grupo de escolares, y de la capacidad para gestionar un trabajo conjunto sobre tareas relativas a unos contenidos matemáticos y lograr el aprendizaje de los estudiantes, son tareas profesionales que desbordan los conocimientos y capacidades del profesor en el inicio de su formación. El profesor en formación necesita de conocimientos específicos sobre el aprendizaje y sobre la enseñanza de las matemáticas escolares para el logro de sus competencias profesionales.

ACTIVIDAD 8: Haz un listado de puntos fuertes y débiles que encuentras en tu preparación didáctica como futuro profesor de matemáticas de Primaria.

La importancia de los conocimientos sobre el aprendizaje matemático escolar ha sido objeto de reflexión y discusión por los educadores matemáticos, como ejemplifica el siguiente decálogo:

«1. Demuestra interés en la materia.
2. Domina la materia.
3. Ten conocimiento acerca de las formas de aprendizaje; el mejor medio de aprender algo es descubrirlo por ti mismo.
4. Trata de indagar en tus estudiantes, trata de entender sus expectativas y dificultades, ponte en su lugar.
5. No les des sólo información, sino «saber hacer», actitudes mentales, hábitos de trabajo metódico.
6. Enséñales a conjeturar.
7. Enséñales a demostrar.
8. Cuida aquellas características de un problema que puedan ser útiles para problemas futuros; trata de mostrar el patrón general que subyace a una situación concreta.
9. Procura que tus estudiantes descubran la solución antes que proporcionársela, deja que averigüen por sí mismos tanto como sea posible.
10. Sugiere, no fuerces las respuestas» (Polya, 1967).

Una vez que, mediante el análisis, se han identificado los contenidos relativos a una determinada estructura conceptual para un curso o nivel, esa reflexión se resume y sintetiza en unos focos preferentes de contenido que establecen unas prioridades de aprendizaje. Focos y prioridades señalan el aprendizaje que se quiere promover y la enseñanza que se quiere planificar. La segunda fase del análisis didáctico, el análisis cognitivo, da continuidad al proceso.

CONCLUSIONES

El análisis didáctico es un método de trabajo propio y adecuado para la educación matemática mediante el cual se estudia el conocimiento didáctico, es decir, el conocimiento sobre un contenido matemático, sobre su aprendizaje y su enseñanza. Tiene su fundamento en la propia matemática, en su historia, en la filosofía del conocimiento y en las disciplinas educativas. Integra las técnicas y modos del análisis, junto con procesos de síntesis complementarios.

Las finalidades del análisis didáctico consisten en fundamentar, dirigir y sistematizar el conocimiento didáctico para planificar, poner en práctica y evaluar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos específi-

© Ediciones Pirámide

cos, según están establecidos por el sistema educativo y tienen lugar en el medio escolar.

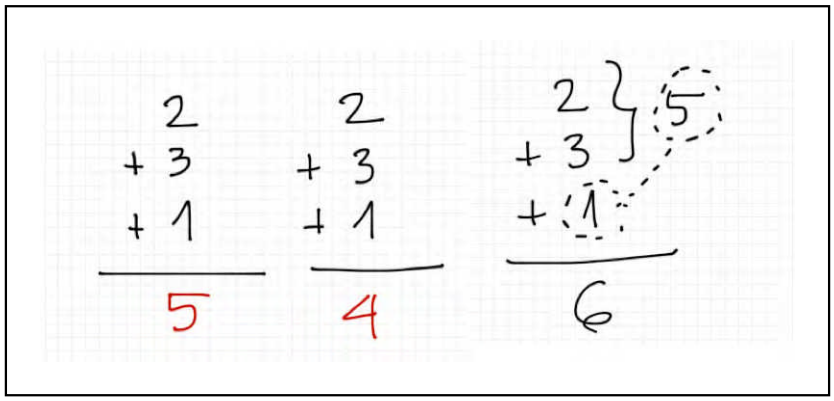
El análisis didáctico lo contemplamos como método propio para la planificación y puesta en práctica del currículo de matemáticas, para entender mejor y poner en práctica los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre contenidos matemáticos específicos, tal y como lo establecen los documentos institucionales, lo prevé la comunidad educativa y es usual en el medio escolar. A lo largo de este capítulo nos hemos centrado en algunos fundamentos e ideas importantes del análisis didáctico, para lo cual hemos revisado el análisis de contenido en que se fundamenta.

El análisis didáctico lo entendemos como modelo que aporta un método de trabajo adecuado para la planificación e implementación del currículo de matemáticas por parte del profesor, y por tanto como un sistema estructurado de conocimientos teóricos y habilidades prácticas con el que guiar su formación inicial como profesor de matemáticas, y así lo queremos poner en práctica.

© Ediciones Pirámide

2 Aprender las matemáticas escolares

JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ
LUIS RICO ROMERO



En una clase de matemáticas de 1.º de Educación Primaria, los escolares sabían aplicar correctamente el algoritmo estándar de la suma de números naturales de una cifra. La profesora quiso introducir entonces la suma con tres sumandos, pero se encontró que sus alumnos o bien sumaban los dos primeros o bien los dos últimos, pero siempre obviaban uno de los sumandos (ejemplos de la izquierda, en la imagen). Optó por mostrar un ejemplo en el que sumaba primero dos sumandos, y al resultado le sumaba el tercero, usando la notación mostrada en el ejemplo de la derecha. Pero los escolares no entendieron esa explicación y no fueron capaces de hacer esas sumas. Al día siguiente, la profesora comenzó la clase proponiendo problemas verbales que se resolvían con una suma de dos números de una cifra, del tipo: *Si tengo 2 caramelos y me regalan 3, ¿cuántos tengo al final?* Los escolares resolvían ese tipo de problemas sin ninguna dificultad, y la profesora continuó esa línea introduciendo una nueva suma: *Si tengo 2 caramelos, me regalan 3 y después me compro yo 1 más, ¿cuántos tengo al final?* Los escolares también resolvieron correctamente esos problemas, por lo que la profesora usó esos resultados para volver a los algoritmos, que, finalmente, supieron realizar. ¿Están claras las expectativas de aprendizaje que perseguía la profesora? ¿Qué dificultades pudieron encontrar los escolares? ¿Qué retos y demandas propuso la profesora para que los escolares tuvieran la oportunidad de avanzar? Estos interrogantes tienen que ver con diversas cuestiones sobre el aprendizaje de las matemáticas que se abordan en este capítulo.

Al pensar en los escolares y en cómo aprenden matemáticas, algunos interrogantes que puede plantearse un profesor son: ¿Qué es aprender matemáticas? ¿Cómo se produce el aprendizaje de las

© Ediciones Pirámide

matemáticas escolares? ¿Cómo se facilita? ¿Qué lo dificulta? ¿Cómo se reconoce? Estas cuestiones tienen gran importancia para la educación matemática, ya que, por ejemplo, en virtud de las respuestas que se consideren, la actividad del profesor puede tomar orientaciones muy diferentes en su práctica docente. El profesor en formación tiene que asumir y ejercitarse en el papel de experto que ayuda al escolar a aprender y que propicia su aprendizaje. Para ello dispone de conocimientos teóricos sobre el aprendizaje escolar y, en ocasiones, de su experiencia práctica.

ACTIVIDAD Reflexiona sobre las cuatro cuestiones anteriores y, junto a tus compañeros, discute con ellos sus consideraciones. ¿Qué conclusiones obtenéis como grupo?

Consideramos que el aprendizaje de las matemáticas está condicionado por diferentes aspectos estrechamente vinculados con la propia naturaleza de la disciplina. Uno de los aspectos que limitan el aprendizaje matemático escolar tiene que ver con los diferentes conocimientos que se consideran en estos niveles. En muchos casos, los alumnos aplican procedimientos o algoritmos sin conocer su significado o no son capaces de aplicarlos en situaciones alejadas de las que habitualmente trabajan en el aula. Por esta razón resulta clave la relación entre el conocimiento factual, conceptual y procedimental, así como el desarrollo de aspectos afectivos y de motivación. Precisamente el vínculo de todas estas facetas del conocimiento matemático es el que destaca la noción de competencia matemática como expectativa de aprendizaje.

© Ediciones Pirámide

1. CÓMO SE APRENDEN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Introducir teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares no es objeto de este capítulo, pero sí está entre sus propósitos describir la opción de trabajo elegida. Entendemos que el aprendizaje de los alumnos se muestra mediante sus actuaciones observables y por la inferencia de que ciertos contenidos y estructuras están presentes en su memoria. Nuestro planteamiento promueve una construcción guiada de los significados de los contenidos matemáticos en un marco socio-constructivista. Esta posición sostiene que los alumnos aprenden de una manera activa, elaborando significados y atribuyendo sentidos, y no sólo recibiendo y acumulando pasivamente información. Este proceso lo llevan a cabo mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas, en contextos particulares culturalmente definidos, y en los que determinados artefactos e instrumentos culturales juegan también un papel decisivo. Para impulsar esa construcción social consideramos esencial el trabajo de planificación y la actuación del profesor.

El aprendizaje escolar implica siempre la construcción de múltiples significados, para llegar finalmente a un conocimiento estructurado de los contenidos. Implica una actividad cognitiva inseparable del medio cultural y tiene lugar entre varias personas, de manera que, mediante las interacciones establecidas, los niños se apropian de los instrumentos cognitivos y comunicativos de su cultura. El profesor interactúa con el escolar, trata de promover la formación integral del alumno y persigue la adquisición, integración y aplicación de nuevos conocimientos, el desarrollo de competencias y la superación de sus dificultades a través de la enseñanza.

ACTIVIDAD 1: Entra en la página http://www.lema-project.org y selecciona el idioma que prefieras. En la sección «Materiales» hay un enlace a una selección de «Vídeos»; selecciona el que se titula «Atasco de Tráfico (Primaria)». Ahí verás una serie de episodios en los que se describe una secuencia de aula. Observa esos episodios y analiza si se promueve una visión social del aprendizaje. Para ello, observa el papel de los alumnos y el profesor, y el tipo de situaciones que surgen en el aula.

Esta caracterización social del aprendizaje tiene varias implicaciones. En primer lugar, resalta la importancia de la comunicación y la argumentación en el aula, ya que estas capacidades constituyen el principal vehículo para elaborar y compartir significados acerca de las

© Ediciones Pirámide

nociones matemáticas. La promoción de los debates y la participación de los alumnos en ellos son prioridades del profesor para el desarrollo de su competencia comunicativa y argumentativa.

En segundo lugar, hay que destacar los conocimientos comunes, previos e informales, de los escolares, a partir de los cuales el profesor puede organizar su enseñanza. Como también es conocido, algunas dificultades de aprendizaje tienen su origen por obviar este tipo de conocimiento informal.

Finalmente, una tercera implicación de esta visión social del aprendizaje se relaciona con un enfoque funcional de las matemáticas escolares. La mejor manera de aprender matemáticas es dentro de un contexto relevante de aplicación y de toma de decisiones. Toma así fuerza la resolución de problemas, que es el entorno que enmarca y da sentido al uso de la matemática en el ámbito escolar y no tanto el aprendizaje factual, estructural y poco contextualizado de la matemática. No cabe duda que es importante que los escolares dominen un vocabulario, unas reglas y unas rutinas propias de esta disciplina, pero el aprendizaje en un contexto escolar no puede ni debe limitarse a esos aspectos.

ACTIVIDAD 2: Busca en Internet un vídeo de un episodio de aula de matemáticas, en el que pueda observarse algunas de las características del aprendizaje de las matemáticas. Descríbelo en esos términos.

2. COMPETENCIA MATEMÁTICA Y SENTIDO MATEMÁTICO ESCOLAR

Esta forma de concebir el aprendizaje es la expresada en los planteamientos curriculares que establecen la finalidad formativa de los escolares en términos de competencias. En el caso de las matemáticas, la noción de competencia expresa la importancia del empleo y la puesta en práctica de manera racional, reflexiva y coherente del conocimiento matemático en una variedad de situaciones y contextos. La competencia matemática es parte constitutiva del currículo de matemáticas y establece el aprendizaje de los escolares sobre esta materia a largo plazo.

Estrechamente vinculada con la noción de competencia matemática está la de *sentido matemático escolar.* Su relación reside en la forma de concebir la formación escolar en matemáticas y las propias matemáticas como área de conocimiento. Expresa y concreta las formas de conocer, comprender y usar las matemáticas que son necesarias para desarrollar la competencia matemática básica, es decir, el uso en contexto de esos conocimientos al término de la educación obligatoria.

ACTIVIDAD 1: Localiza en el currículo actual la descripción de competencia matemática e identifica sus componentes clave.

El conocimiento de la terminología propia de las matemáticas, con sus vocablos y expresiones más usuales, la definición de los conceptos básicos y el manejo de técnicas y algoritmos, constituye el conocimiento del contenido matemático. Aprender el contenido matemático es un aspecto importante del aprendizaje matemático escolar; sin embargo, no es el único aprendizaje ni, en ocasiones, el prioritario. La noción de competencia subraya que aprender las matemáticas escolares consiste en saberlas utilizar en contexto, es decir, usar los conceptos y destrezas matemáticos para desenvolverse en diferentes situaciones y resolver problemas. Por ello, el aprendizaje que se ha de promover durante la Educación obligatoria no se puede cen-

© Ediciones Pirámide

trar en los aspectos técnicos y formales de la disciplina. Esta otra manera de entender el aprendizaje de las matemáticas se concreta en la noción de sentido matemático escolar, que se desarrolla ampliamente en este libro.

Para ser matemáticamente competente hay que conocer y usar las matemáticas con sentido, lo cual puede concretarse en las siguientes facetas:

- Conocer, representar, comunicar, ejemplificar y usar los contenidos matemáticos.
- Identificar y describir situaciones en que los conceptos y procedimientos implicados se pueden poner en juego considerando sus condicionantes.
- Resolver problemas y cuestiones usando una variedad amplia de estrategias en diferentes contextos.
- Cultivar una actitud crítica y constructiva para validar y contrastar los razonamientos seguidos y las soluciones encontradas.

Identificamos cuatro campos para el sentido matemático escolar, según la organización curricular por bloques de contenidos. El primero, el *sentido numérico,* se centra en comprender los conceptos y estructuras numéricas como referentes para actuaciones básicas, por ejemplo contar, ordenar, cuantificar, operar y clasificar, así como emplear con coherencia sus diferentes modos de representación. Tiene que ver con la puesta en práctica de las relaciones y las operaciones numéricas y con el uso reflexivo de distintos algoritmos, destacando especialmente el cálculo mental y la estimación. De manera general, considera la importancia de desarrollar sensibilidad hacia la pertinencia y la razonabilidad de los cálculos y de aplicar estrategias útiles para resolver problemas numéricos.

El *sentido espacial* lo desarrollan los escolares cuando son capaces de identificar, analizar y describir características y propiedades de figuras geométricas, en dos y tres dimensiones, con criterios compartidos o propios. También se muestra en la habilidad para localizar y describir posiciones y trayectorias, describir invariantes y relaciones entre cuerpos y figuras, así como aplicar e identificar transformaciones, composiciones y descomposiciones geométricas. De manera general, el sentido espacial enfatiza la importancia de la visualización y de la capacidad para interpretar y describir el entorno mediante nociones, propiedades y relaciones geométricas.

El tercer campo del sentido matemático escolar se centra en el bloque de contenidos sobre magnitudes y sobre medida. El *sentido de la medida* destaca la identificación de atributos y características mensurables, así como conocer, seleccionar y utilizar unidades de medida apropiadas a cada situación, tanto convencionales como no convencionales. La estimación es un aspecto crucial del sentido de la medida, cuando los escolares son capaces de seleccionar la técnica más apropiada en cada situación. De modo global, el sentido de la medida se centra en dimensionar adecuadamente el entorno y en aplicar reflexiva y coherentemente diversas estrategias de medida, de acuerdo a las exigencias y necesidades de las situaciones problemáticas enfrentadas.

Finalmente, el *sentido estocástico* expresa un uso acertado de las nociones de la estadística y la probabilidad. Se centra en formular preguntas para después recoger, organizar y presentar datos de diversa índole. También tiene que ver con seleccionar, utilizar y validar métodos con los que analizar esos conjuntos de datos y conjeturar y evaluar inferencias y predicciones. Estudiar y abordar situaciones de aleatoriedad para poder evaluar la posibilidad, imposibilidad o seguridad de determinados hechos y sucesos también es clave. Globalmente, esta cuarta componente del sentido matemático escolar destaca la inter-

© Ediciones Pirámide

pretación crítica y el análisis de varios tipos de informaciones, así como el rigor y la objetividad para desenvolverse en situaciones de incertidumbre y en la toma racional de decisiones.

ACTIVIDAD 2: Piensa en una o varias tareas que un alumno de segundo ciclo de Educación Primaria tendría que ser capaz de resolver, para mostrar que domina, al menos, una de las cuatro componentes del sentido matemático escolar.

Cada una de estas componentes del sentido matemático se describe con detalle en los capítulos 5, 6, 7 y 8 de este libro. Centramos ahora nuestra atención en el aprendizaje y en el afianzamiento, por parte de los escolares, del sentido matemático descrito.

3. LA PLANIFICACIÓN DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Tal y como se ha presentado en el capítulo anterior, el análisis didáctico constituye un procedimiento que permite al profesor planificar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. Con la realización del análisis de contenido, el análisis didáctico pone su foco de atención en el estudio pormenorizado del contenido matemático, para que el profesor puede organizar toda la complejidad de nociones y relaciones que conforman los temas de matemáticas. Pero de cara a planificar su actuación docente, el profesor no debe limitar su actividad a analizar y organizar este contenido matemático.

Para planificar el aprendizaje de los escolares, el profesor en formación tiene que conocer e instruirse en un conjunto de técnicas y ejercitarse en cierto dominio de rutinas prácticas. El profesor tiene que tomar decisiones relativas al trabajo del escolar, al trabajo cooperativo entre varios aprendices y al trabajo conjunto entre aprendiz y profesor. Muchos expertos reconocen esta necesidad, enfatizando estrategias y técnicas que deben atender los profesores, como las siguientes:

1. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
2. Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.
3. Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial.
4. Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
5. Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.
6. Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.
7. Secuenciar adecuadamente los contenidos matemáticos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.
8. Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos.
9. Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de «hablar matemáticas» en el aula.
10. Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las matemáticas (Onrubia, Rochera y Barberá, 2002).

ACTIVIDAD 1: Identifica en el listado anterior, separadamente, los conocimientos, las capacidades y las actitudes que se consideran necesarias para el profesorado.

© Ediciones Pirámide

El segundo procedimiento del análisis didáctico lo constituye el análisis cognitivo, que aborda el estudio de la problemática del aprendizaje de los temas de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional. De esta manera, en este segundo momento el foco de atención en el análisis didáctico pasa de los contenidos matemáticos a los aprendizajes esperados sobre dichos contenidos.

4. ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje matemático de los escolares. Considera los conocimientos, capacidades y actitudes necesarios para que el profesor aborde los problemas del aprendizaje de un tema concreto de las matemáticas escolares. Planificar el trabajo en el aula requiere que el profesor establezca y detalle los aprendizajes esperados de los alumnos, considere aquellas cuestiones que puedan interferir en esos aprendizajes y destaque aquellas oportunidades que estimulan y promueven los aprendizajes sobre un tema concreto.

4.1. Categorías del análisis cognitivo

Al centrarse en el aprendizaje, en el análisis cognitivo debe tomarse en consideración la edad y el curso de los escolares con los que se va a trabajar, la ubicación de los contenidos en el currículo, los conocimientos previos y la profundidad con la que se quieren lograr los nuevos aprendizajes, entre otros aspectos.

Abordamos el análisis cognitivo de un contenido matemático escolar mediante un proceso articulado en tres componentes sucesivas. Cada una de esas componentes responde a un sistema propio de ideas y dispone de sus propias categorías de análisis. Un primer momento consiste en identificar las expectativas sobre el aprendizaje. Para ello hay que declarar esas expectativas, enunciarlas como propuestas y redactarlas como textos, para poder analizarlas, revisarlas, relacionarlas y, en su caso, modificarlas.

Un segundo momento consiste en documentar la complejidad de los aprendizajes conjeturados, analizar sus eventuales dificultades, e identificar y sistematizar los errores usuales sobre el tópico en estudio para remediarlos.

Un tercer momento se centra en detectar, describir y organizar las oportunidades que se proporcionan a los escolares para el logro de sus aprendizajes.

Consideramos estas tres componentes para realizar el análisis cognitivo de un tema, progresivamente, cada una con su propio sistema de categorías:

- Las *expectativas sobre el aprendizaje* del tópico considerado, las cuales establecen, conjuntamente, lo que el profesor y las distintas instancias educativas esperan que los alumnos aprendan.
- Las *limitaciones en el aprendizaje del tópico* detectadas, que identifican y estudian los distintos tipos de dificultades para el logro de un aprendizaje y los errores de los alumnos, para diagnosticar y corregir los eventuales fracasos y orientarles en su superación.
- Las *oportunidades de aprendizaje* que el sistema educativo brinda a los alumnos, que les plantean demandas cognitivas concretas y les ofrecen vías para profundizar sobre determinados conocimientos, que el profesor gestiona y selecciona.

ACTIVIDAD 1: Enuncia tres objetivos sobre aprendizaje del sistema decimal de numeración. Identifica dos dificultades conocidas que se presentan en el estudio de los cuerpos geométricos. Describe dos actividades que faciliten el aprendizaje de los conceptos de superficie y medida de una superficie.

© Ediciones Pirámide

Dedicaremos el resto del capítulo a detallar cada una de estas tres componentes.

5. EXPECTATIVAS SOBRE EL APRENDIZAJE

El profesor de matemáticas planifica su trabajo cuando selecciona unos contenidos que estima relevantes para su enseñanza. El profesor elige y resume aquellos conocimientos que considera que los alumnos deben aprender, guiado por una convicción fundada. Mediante descripciones concretas, establece las prioridades de aprendizaje relativas a conceptos y procedimientos. Al enunciar los conocimientos y capacidades concretos esperados de los escolares, el profesor establece sus expectativas sobre el aprendizaje y se compromete con su logro.

5.1. Qué son las expectativas sobre el aprendizaje escolar

Empleamos este término para referirnos, de manera general, a las capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los escolares logren, adquieran, desarrollen o utilicen, como resultado de alguna propuesta institucional de formación.

ACTIVIDAD 1: Describe qué expectativa de aprendizaje se propone lograr la profesora en el ejemplo inicial de este capítulo con la tarea propuesta.

Las expectativas sobre el aprendizaje escolar de las matemáticas expresan usos apropiados y reconocibles de los contenidos matemáticos, junto con actitudes positivas de los escolares hacia ellos. Sus logros se han de reconocer empíricamente, ya que se han de mostrar e inferir a partir de las actuaciones observables que los escolares realizan como respuesta a una demanda cognitiva viable. Las expectativas sobre el aprendizaje matemático se enuncian en términos de contenidos, se plantean mediante una o varias tareas, y se evidencian mediante sus logros y actuaciones.

ACTIVIDAD 2: Enuncia al menos tres expectativas para los escolares de Primaria, relativas al sentido numérico. Identifica en cada una de ellas el contenido, la actuación y la tarea que puede caracterizarla.

En los documentos curriculares las expectativas sobre el aprendizaje matemático escolar se enuncian desde distintos niveles. Así, aparecen los objetivos generales del sistema educativo, los objetivos generales de la etapa y del ciclo educativo, los objetivos generales del área o materia, y también los objetivos de las asignaturas de cada curso. Recientemente las encontramos como competencias generales o de la disciplina, entre otros varios.

Así, por ejemplo, un enunciado como «apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas (...)», expresa una expectativa general en matemáticas para toda una etapa educativa. Su generalidad la hace válida tanto para Educación Primaria como para Educación Secundaria. A su vez, «descomponer un polígono en triángulos» expresa una expectativa más concreta, vinculada a un determinado tema de geometría, que indica unas actuaciones y está dirigida a un logro por los escolares de Primaria.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 3: Localiza en la normativa general actual, en los objetivos del currículo de Primaria y en los objetivos para las matemáticas de Primaria, enunciados de objetivos que estén relacionados con el sentido de la medida.

5.2. Enunciar objetivos específicos para un tema de matemáticas

La redacción de los objetivos institucionales corresponde a los distintos organismos y entidades administrativas responsables. Dichos objetivos institucionales son generales y consideran también las matemáticas escolares. Así, se encuentran objetivos en la Ley de Educación, en los decretos y en las órdenes que regulan los currículos, tanto a nivel estatal como autonómico.

La normativa educativa precisa las expectativas sobre el aprendizaje matemático de los escolares de Primaria según distintos ámbitos y niveles. Esas expectativas sobre el aprendizaje escolar, establecidas por la normativa, se han de tener en cuenta en el momento de abordar la planificación de un tema escolar de matemáticas de Primaria. No obstante, ninguno de los documentos contemplados puede expresar las prioridades que un profesor quiera finalmente establecer sobre un tema concreto.

Dentro del marco normativo general, el profesor, cuando trabaja en la planificación de un tema del currículo de matemáticas, tiene que contemplar, de manera singular, las expectativas derivadas de su trabajo didáctico previo, de los análisis y las síntesis realizadas. Los documentos institucionales no dan respuestas a estas expectativas. Tampoco lo hacen siempre los manuales escolares y los libros de texto.

ACTIVIDAD 4: Describe algunas limitaciones que los documentos normativos generales tienen a los efectos de planificar un tema escolar. Igualmente, describe las limitaciones que tienen los manuales escolares a efectos de planificar un tema escolar. Propón un ejemplo de aquellas que consideres más importantes.

La síntesis ordenada de las expectativas que se presentan en los distintos documentos curriculares permite identificar finalidades globales, para una etapa o para una materia, pero conviene que el profesor planifique las expectativas específicas para cada tema de matemáticas. Es necesario tomar decisiones concretas en todas y cada una ellas, sintetizarlas, resumirlas, vincularlas y ordenarlas. Concluida esta tarea de análisis-síntesis, cada profesor marca sus prioridades respecto a un tema matemático concreto, aquellas que él, como responsable del aprendizaje de unos alumnos, considera ineludibles respecto a ese tema, para lo cual procede a enunciar los objetivos específicos del tema en cuestión.

El siguiente listado recoge, a modo de ejemplo, una serie de objetivos específicos, listado que puede fácilmente ampliarse. Se puede observar que todos los enunciados están relacionados con el tema de fracciones, si bien expresan diferentes demandas y destacan distintas facetas de ese contenido:

1. Conocer los nombres de los términos de una fracción.
2. Comprender el significado de fracción, es decir, definir y representar fracciones.
3. Identificar diferentes modos de uso de una fracción, según la situación en que se emplean.
4. Obtener porciones fraccionarias de una cantidad tomada como unidad.
5. Obtener fracciones equivalentes a una fracción dada.

© Ediciones Pirámide

6. Resolver problemas empleando fracciones.
7. Describir diferentes representaciones de una misma fracción.
8. Identificar situaciones de la vida cotidiana en las que se emplean fracciones.
9. Definir el concepto de fracción.
10. Operar con fracciones sencillas.

Estos enunciados muestran cómo la simple elección de un tema no establece de manera única lo que un profesor puede esperar del aprendizaje de sus escolares sobre dicho tema. Cuando el profesor establece y redacta sus propias opciones, conoce el alcance de sus intenciones educativas, con las cuales avanzar en la planificación del tema. El profesor necesita expresar tales expectativas sobre el aprendizaje escolar deseable y factible, redactando sus objetivos específicos. Identifica sus propuestas al hacerlas explícitas, ya que, mediante ellas, se responsabiliza de su plan de trabajo.

ACTIVIDAD 5: Enuncia cinco objetivos específicos de aprendizaje sobre el tema «Números de dos cifras» para niños de primer curso de Primaria. Comparte tus expectativas con las de tus compañeros y valora su vinculación con el sentido numérico.

Una vez redactadas sus propias expectativas, es importante que el profesor las refuerce, vinculándolas con las expectativas institucionales, y reconozca a cuáles de ellas contribuyen los enunciados concretos de los objetivos. Los objetivos de un tema de matemáticas expresan expectativas sobre su aprendizaje a corto plazo y se refieren a determinadas facetas del sentido matemático. Por ello, también debe reconocerse expresamente qué contribución hace cada uno de ellos a los objetivos generales de matemáticas y a la competencia matemática básica.

ACTIVIDAD 6: Por cada uno de los objetivos antes redactados, identifica su vinculación con los objetivos generales de Primaria y su aportación a la competencia matemática.

5.3. Criterios para la redacción de objetivos específicos

Cada tema matemático puede responder a diversas expectativas de aprendizaje por los escolares, lo cual hace necesario que el profesor enuncie las prioridades cognitivas relacionadas, determine su objeto y alcance, y las organice, relacione y ordene.

Enunciar las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares por parte del profesor requiere cuidar su precisión e incluir la diversidad y riqueza de los conocimientos implicados. También supone indicar su logro en el corto, medio y largo plazo.

En sus enunciados es conveniente que los objetivos hagan referencia a:

- Prioridades en el dominio conceptual y procedimental de cada tema, que destaquen determinadas facetas del sentido matemático.
- Elección de los sistemas de representación y dominio de las tareas de conversión entre los diferentes sistemas. Niveles de dominio convenientes en cada caso.
- Descripción de las capacidades en la ejecución de procedimientos, con especial énfasis en las estrategias y resolución de problemas.
- Selección de contextos y situaciones representativas en que los conceptos y procedimientos tienen uso y aplicación.
- Comprensión de los principales significados de cada campo conceptual.

© Ediciones Pirámide

- Superación de las dificultades conceptuales, y diagnóstico y corrección de los errores usuales de cada tópico.
- Prioridades en el empleo de recursos y medios tecnológicos, en su selección y su dominio.
- Fomento de actitudes positivas respecto de las matemáticas, tales como satisfacción con las tareas bien hechas, con la construcción coherente de argumentos, búsqueda de la verdad y apreciación de la belleza en las realizaciones matemáticas.

ACTIVIDAD 7: Revisa los enunciados de los objetivos sobre fracciones y de aquellos que has redactado en la actividad 5 y comprueba cuál o cuáles de estos criterios satisfacen.

A continuación aparece una propuesta de enunciados de objetivos específicos sobre magnitudes y medida para segundo curso de Educación Primaria. Como verás en el capítulo siguiente, estos objetivos permiten seleccionar y justificar la pertinencia de determinadas tareas escolares.

1. Percibir las magnitudes longitud, peso/masa, capacidad, tiempo y superficie como atributos medibles.
2. Realizar mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales en contextos cotidianos.
3. Conocer las unidades de medida convencionales y aplicar las conversiones entre sus múltiplos y submúltiplos. Utilizarlas en contextos reales de uso cotidiano.
4. Medir superficies mediante unidades no convencionales (cuadrículas y baldosas) y convencionales (en cuadrados y rectángulos).
5. Establecer la relación entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida.
6. Elegir la unidad y el instrumento más adecuados para calcular y expresar la medida de una cantidad.
7. Utilizar la notación de unidades de uso frecuente y conocer su significado.
8. Elaborar y utilizar estrategias personales para medir.
9. Estimar medidas de objetos de la vida cotidiana.
10. Explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos y las estrategias utilizadas en la medición. Utilizar vocabulario adecuado.
11. Resolver problemas de medida en contextos familiares y cercanos al alumnado.
12. Explicar el significado de los datos de un problema, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. Contrastar puntos de vista.
13. Mostrar interés por conocer y utilizar la medida y por expresar los resultados de las mediciones, manifestando las unidades utilizadas.

ACTIVIDAD 8: Revisa y modifica estos objetivos, a fin de que cada uno de los enunciados satisfaga, al menos, tres de los criterios anteriores.

6. LIMITACIONES EN EL APRENDIZAJE

Consideramos que las dificultades y los errores son limitaciones que impiden o entorpecen el proceso de aprendizaje. Por este motivo, su consideración, manifiesta y detallada, debe ser objeto de reflexión por parte del profesor cuando planifica el aprendizaje de los escolares.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 1: Describe dos dificultades en el aprendizaje de los números naturales y explica en qué consisten.

En la planificación de un tema de las matemáticas escolares es preciso disponer de información sobre qué aspectos, conceptos o procedimientos van a tener una dificultad especial, así como aquellos errores en que los estudiantes suelen incurrir por un conocimiento insuficiente o deficiente del tema. No sólo es necesaria esa información, sino que el profesor debe saber cómo diagnosticar los errores de sus alumnos y qué tratamiento darles para remediar esas deficiencias.

ACTIVIDAD 2: Una profesora de 1.º de Primaria pide a sus alumnos que resuelvan los cuatro problemas siguientes, de la forma que ellos quieran, usando materiales si lo desean.

Problema 1: José tiene 3 paquetes de pegatinas. Hay 6 pegatinas en cada paquete. ¿Cuántas pegatinas tiene José en total?

Problema 2: Marta tenía 5 peces en su pecera. Le dieron 7 más en su cumpleaños. ¿Cuántos peces tenía Marta después?

Problema 3: Juan tenía algunos coches de juguete. Perdió 7 coches de juguete. Ahora le quedan 4. ¿Cuántos coches de juguete tenía Juan antes de perder ninguno?

Problema 4: María tenía 13 globos. 5 de ellos se le reventaron. ¿Cuántos globos le quedaron a María?

La profesora comprueba que dos de los problemas son más difíciles para sus alumnos que los otros dos. ¿Qué problemas serán esos? ¿En qué reside esa dificultad?

Estudiar las dificultades y los errores que se pueden presentar constituye una segunda componente del análisis cognitivo de un contenido matemático escolar. Las categorías de esta nueva componente permiten conocer las limitaciones que los alumnos pueden encontrar en su proceso de aprendizaje.

ACTIVIDAD 3: Describe tres tareas relativas al estudio y clasificación de los triángulos en el plano, que presenten distinto nivel de dificultad. Justifica por qué las tareas tienen niveles de dificultad diferentes.

6.1. Dificultades de aprendizaje en matemáticas

¿Qué se entiende por dificultades en el aprendizaje de las matemáticas? La experiencia muestra que lleva más tiempo entender determinados contenidos matemáticos, o bien que un número importante de alumnos no alcanza a comprenderlos correctamente. Estos contenidos se consideran difíciles o de mayor dificultad, por motivo de esos aspectos o características.

ACTIVIDAD 4: Un escolar advierte que al hacer la operación $0{,}2 \times 6$ con su calculadora el resultado es menor que 6, pero que si introduce $6 \div 0{,}2$ el resultado es mayor que 6. Eso desconcierta al escolar y dice que su calculadora no funciona bien. ¿Qué dificultad parece tener?

Las dificultades de aprendizaje en matemáticas tienen orígenes distintos. Los expertos organizan las dificultades de aprendizaje atendiendo a distintos criterios:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

© Ediciones Pirámide

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje matemático.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas (Socas, 1997).

ACTIVIDAD 5: Reflexiona y describe un ejemplo de dificultad de aprendizaje relativa a cada uno de los cinco criterios enunciados.

Los cinco tipos anteriores muestran todo un programa de trabajo para estudiar la ocurrencia y origen de las dificultades sobre el aprendizaje de las matemáticas. En los siguientes capítulos de este libro encontrarás ejemplos de ellos. Veamos a continuación un análisis más detallado de las dificultades debidas a la complejidad de los conceptos matemáticos.

En la red compleja de conceptos y procedimientos que organizan una estructura matemática hay conexiones y relaciones que requieren mayor atención, porque incluyen mayor número de componentes y, por ello, presentan mayor complejidad. El manejo del algoritmo de la resta, por ejemplo, suele generar dificultades a los escolares, pues en relación con el de la suma exige un conocimiento del sistema decimal de numeración más elaborado.

ACTIVIDAD 6: Identifica dos dificultades relacionadas con el algoritmo de la resta, una de las cuales proceda del incremento de las componentes estructurales de la otra.

También los distintos sistemas de representación que se utilizan en una determinada estructura trabajan con sistemas de símbolos progresivamente más esquemáticos y abstractos, menos intuitivos, cuyas reglas de procesamiento y transformación son cada vez más elaboradas. En muchos casos, una notación aparentemente sencilla trae consigo una gran cantidad de información que puede pasar desapercibida a los escolares; la relación 0,999... = 1 es un ejemplo.

ACTIVIDAD 7: Identifica alguna dificultad debida al grado de abstracción de su representación o a la singularidad de las reglas que se manejan para la representación de un contenido.

Finalmente, los modos de entender los usos de unos determinados conceptos pueden presentarse en contextos más abstractos y generales; la complejidad creciente de los significados de una estructura matemática hace más difícil su comprensión. Este hecho puede tener después una gran relevancia en el afianzamiento de algunas facetas propias del sentido matemático. Así, por ejemplo, el hecho de que en el aula la mayor parte de las tareas siempre estén enmarcadas en un contexto meramente matemático, puede generar después dificultades en los escolares para emplear esas mismas nociones en un contexto más personal o social.

ACTIVIDAD 8: Propón cuatro ejemplos de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, cada uno de ellos correspondiente a uno de los bloques del contenido matemático escolar.

6.2. Errores en las matemáticas escolares

¿Qué se entiende por error en el aprendizaje de las matemáticas escolares?

Es propósito del aprendizaje de las matemáticas la construcción y adquisición de conoci-

© Ediciones Pirámide

miento verdadero; sin embargo, los procesos de aprendizaje de los escolares vienen acompañados de errores sistemáticos, que muestran un conocimiento falso o deficiente. El error es un hecho objetivo que se presenta en los procesos de aprendizaje, de manera destacada en el aprendizaje de las matemáticas. El error es un dato empírico que muestra un desconocimiento o un conocimiento inadecuado sobre un contenido matemático que tiene un alumno, o un grupo de alumnos.

ACTIVIDAD 9: Explica tres errores que hayas observado o en que hayas incurrido tú en algún momento de tu trabajo en matemáticas.

Los errores en matemáticas son resultado de una construcción inadecuada o de la comunicación deficiente de un determinado concepto o procedimiento. Al producirse el error, el profesor percibe la incorrección del dato o respuesta, pero, como no lo ha previsto, no suele atender a las causas que lo provocan. La respuesta usual es reprobar la respuesta incorrecta del alumno y reiterar la misma tarea u otra similar.

ACTIVIDAD 10: Haz un breve resumen de cómo valoras el error escolar en el aprendizaje de las matemáticas.

También los errores son una vía de acceso al conocimiento, siempre que vengan acompañados de la reflexión y del pensamiento crítico sobre las inconsistencias o las consecuencias incoherentes de una noción mal empleada.

ACTIVIDAD 11: Argumenta cuál puede ser la causa de los errores descritos en la actividad anterior. Explica cómo interpretar la regla o concepto que daría lugar a cada error.

Los errores de los alumnos son, frecuentemente, resultado de un procedimiento sistemático con algunas imperfecciones, procedimiento que los alumnos utilizan habitualmente y con confianza. Estas concepciones inadecuadas afectan a aspectos básicos del conocimiento matemático. Este es el caso de aquellos alumnos que afirman que entre los números 1,78 y 1,79 no hay ningún otro número decimal. La regla que aplican considera los números decimales como naturales; ya que entre los naturales 178 y 179 no hay otro natural, igual ocurrirá con los decimales mencionados. Los alumnos manejan reglas o conceptos de manera inadecuada, aunque sus profesores en muchos casos no lo perciben.

ACTIVIDAD 12: A partir del ejemplo anterior, justifica por qué se dice que los errores son sistemáticos.

¿Dónde aparecen los errores de aprendizaje en las matemáticas escolares? El error es algo natural en el aprendizaje de las matemáticas, que debe diagnosticarse para ayudar a los escolares a su superación. Nuestra posición sobre el aprendizaje considera que todo conocimiento es construido, y en concreto el conocimiento matemático se construye a partir de un conocimiento anterior. En el proceso usual de construcción de nuevos conocimientos matemáticos los errores aparecen de manera sistemática, ya que suelen atender a reglas previas, si bien incompletas o deficientes.

Cuando el alumno responde erróneamente está expresando el carácter incompleto de su conocimiento; es el momento en que el profesor y los compañeros pueden ayudarle a que complete el conocimiento adicional ausente, o ayudarle para que comprenda por sí mismo aquello que no está bien. De otra manera, puede promoverse una actitud de rechazo hacia la

© Ediciones Pirámide

matemática y el sentimiento de fracaso en esta disciplina.

ACTIVIDAD 13: Asumiendo ahora tu papel como futuro profesor, redacta una pregunta para identificar al menos uno de los tres errores enunciados en la actividad 9.

La investigación en Didáctica de la Matemática ha generado un amplio conocimiento sobre los errores más frecuentes relativos a algunos conceptos básicos. Por tanto, en la planificación de los procesos de aprendizaje sobre un tópico determinado hay que tener en cuenta los casos usuales de errores, e incluir actividades mediante las que detectarlos, controlarlos y corregirlos.

ACTIVIDAD 14: Busca en la red información sobre errores usuales en el aprendizaje de los números naturales. Describe con detalle uno de estos ejemplos.

6.3. Planificación y tratamiento de errores y dificultades

El conocimiento de los errores de los escolares en matemáticas, su tipología, clasificación, diagnóstico, tratamiento y corrección forman parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas a cuyo dominio hay que dedicar tiempo y trabajo. Se trata de una competencia profesional sobre la cual trabajan distintos capítulos de este libro.

El estudio de los errores y dificultades proporciona esquemas para organizar los contenidos. Una determinada secuencia de tareas puede facilitar la superación de dificultades o evitar errores específicos. También la selección de una forma de representación o de un ejemplo concreto puede contribuir a superar esas limitaciones.

ACTIVIDAD 15: Vuelve al ejemplo del escolar que no entendía lo que mostraba su calculadora (actividad 4 de este epígrafe). Busca una representación gráfica que puedas mostrar a ese alumno para ver que es razonable obtener el resultado que proporciona la calculadora con la operación $0{,}2 \times 6$.

También el estudio de errores ayuda a establecer objetivos, en cuanto que éstos marcan algunas limitaciones que deben superarse mediante una organización correcta de contenidos. Igualmente, el conocimiento de los errores y las dificultades proporciona orientaciones para diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos, que les exijan revisar sus conocimientos previos y superar las limitaciones conceptuales.

ACTIVIDAD 16: Escribe argumentos a favor y en contra del estudio de las limitaciones sobre el aprendizaje de los contenidos para planificar los temas del currículo de matemáticas de Primaria. Discutid en pequeños grupos vuestros argumentos.

7. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

La noción de *oportunidades de aprendizaje* se viene utilizando para referirse a aquellas condiciones, circunstancias y experiencias que promueven o facilitan el aprendizaje de los escolares. Las oportunidades de aprendizaje se caracterizan según varias componentes, que van desde currículos y programas de instrucción, pasando, entre otros, por el equipamiento de los centros o la formación de los profesores,

© Ediciones Pirámide

por las cuestiones que un docente propone a sus alumnos o por el tipo de actuaciones que éste fomenta en el aula. Es decir, en el caso de los profesores, las experiencias y propuestas que plantean a sus escolares constituyen oportunidades para aprender.

ACTIVIDAD 1: Elabora un listado con algunas oportunidades de aprendizaje que un escolar del último curso de Primaria seguramente ha recibido a lo largo de sus años de formación. Señala cuáles de ellas tienen lugar por el trabajo y la actividad del profesor.

Se reconoce la importancia del contexto en que se realiza la preparación de los escolares; también su secuencia temporal y su vinculación con el medio social del que procede. Analizar las oportunidades de aprendizaje del grupo de escolares con el que se trabaja consiste en establecer qué conocimientos han recibido o se ubican en su medio social. También consiste en detectar cuáles otros conocimientos no han sido proporcionados o bien es difícil que lo hayan sido. Estudiar las oportunidades de aprendizaje surge de un planteamiento constructivista y antropológico, que destaca dos ideas: los conocimientos matemáticos son una construcción social, y los sistemas educativos transmiten el patrimonio cultural de una sociedad.

ACTIVIDAD 2: Describe una experiencia de aprendizaje sobre matemáticas escolares que no esté entre las oportunidades que tiene un estudiante actual de Primaria.

Si limitamos nuestra reflexión sobre oportunidades de aprendizaje a lo que puede suceder en el aula, el profesor desempeña ahí el papel de principal impulsor de las experiencias que pueden constituir oportunidades de aprendizaje para los escolares. Como se desarrolla en el capítulo 3, las tareas que el profesor propone a los escolares les suministra oportunidades para su aprendizaje.

7.1. Tareas como oportunidades de aprendizaje

Las tareas matemáticas escolares constituyen el principal medio por el que un profesor puede incentivar en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas y, por tanto, contribuir al desarrollo de su competencia matemática. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto en el cual proponer a los escolares determinadas actuaciones con sentido para ellos, mediante el ejercicio de una o varias habilidades matemáticas. Las tareas ejemplifican y, a la vez, muestran una diversidad de actividades que pueden considerarse en relación con y bajo el enunciado de un determinado objetivo. Una tarea es un reto para el alumno y sirve para motivar la comprensión de un contenido, movilizando conceptos y procedimientos y dotándoles de sentido. Asimismo, es un indicador para que el profesor valore el logro de uno o varios objetivos de aprendizaje. El desarrollo paulatino de la competencia matemática en los escolares se estimulará mediante familias de tareas conexas, que también servirán como instrumentos para valorar el grado de su logro y alcance.

Por otro lado, el diseño y selección de tareas permite al profesor afrontar el estudio de las limitaciones en el aprendizaje de un contenido en términos de errores y dificultades. Las tareas proporcionan oportunidades para detectar la existencia de errores en las actuaciones de los escolares, sirven como reactivos que aportan indicadores de yerros o descuidos, ofertan vías

© Ediciones Pirámide

para superarlos y brindan criterios para evaluar esa superación.

ACTIVIDAD 3: Describe una tarea que, específicamente, persiga explorar alguna dificultad de los escolares, relacionada con la resta de números naturales.

En capítulos posteriores se ejemplifican y profundizan muchas de estas reflexiones. Así, en el capítulo 3 se presentan las tareas matemáticas escolares como el principal recurso del profesor para promover el aprendizaje, proponiendo distintas variables y posibilidades para su diseño y selección. En el capítulo 4 se detalla la importancia de la resolución de problemas como caso particular de tareas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde el capítulo 9 en adelante se muestran diferentes prioridades y expectativas de aprendizaje en el marco de la Educación Primaria, para que los escolares desarrollen su sentido matemático y superen las dificultades propias de la materia.

En lo que sigue, destacamos el vínculo entre tareas matemáticas escolares y logro de expectativas. Las tareas expresan demandas cognitivas que el profesor plantea a los escolares y que les permiten avanzar en su aprendizaje. Pero el carácter funcional de las matemáticas brinda un espectro amplio de demandas que es importante considerar.

7.2. Demandas cognitivas de las tareas

Cuando un profesor propone una tarea a un escolar, o a un grupo de escolares, esa tarea les demanda una actividad cognitiva que requiere movilizar sus conocimientos y ejercitar su sentido matemático. Esto ocurre tanto cuando el profesor propone una cuestión en clase a todos los alumnos como cuando propone una tarea específica para practicar algo previamente explicado. Desde el punto de vista del profesor, cada tarea tiene una intencionalidad, vinculada con el logro de algún objetivo; así contribuye al desarrollo de las capacidades y competencia matemática de los escolares. Los sistemas educativos plantean demandas cognitivas institucionalizadas a los escolares, si bien, usualmente, lo hacen de manera excesivamente formal y convencional, mediante exámenes y pruebas de evaluación.

Una *demanda cognitiva* es algo muy distinto a un examen. Es un medio por el cual los seres humanos se proponen y exigen entre ellos comportamientos inteligentes, planteando interrogantes que pongan a prueba la capacidad intelectual de cada individuo. En el caso de las matemáticas, su carácter funcional exige al profesor demandar a sus alumnos actuaciones que promuevan en ellos el sentido matemático, para poder dar forma a su competencia matemática. Dichas actuaciones se reconocen porque plantean un interrogante o una demanda de actividad estructurada, y la actividad que provocan requiere la reflexión del alumno mediante el uso de las matemáticas. Es responsabilidad del profesor partir de la preparación previa de sus escolares y ponerla en valor para ellos, mostrando el carácter útil, práctico y también intelectualmente creativo que tienen las matemáticas con las que trabajan en la escuela y encuentran en su vida cotidiana, y que deben utilizar con sentido.

El razonamiento y el uso crítico de conceptos y procedimientos matemáticos para abordar tareas en una variedad amplia de situaciones y contextos se aúnan en las nociones de sentido matemático escolar y de competencia. Esta forma de entender las demandas cognitivas que plantean las tareas para el aprendizaje y la ense-

© Ediciones Pirámide

ñanza de las matemáticas considera tres facetas claves: formular, emplear e interpretar.

Formular implica identificar oportunidades para aplicar y utilizar las matemáticas, ya que éstas pueden emplearse para comprender o resolver determinados problemas o desafíos que se presentan. Incluye la capacidad para tomar una situación tal y como se presenta y transformarla para ser tratada de forma matemática, proporcionando estructuras y representaciones, identificando variables y formulando modelos simplificadores que contribuyan a abordar el problema o a dar respuesta al desafío. Un ejemplo de tarea que ejemplifica esta demanda es la siguiente:

En un restaurante ofrecen un jamón serrano muy bien valorado por los clientes. Un plato con 200 g de este jamón vale 10 € y otro con 300 g cuesta 20 €. ¿Cuál es la opción más ventajosa en función del precio?

La necesidad de encontrar un modelo que relacione la cantidad de producto con el coste se concreta en buscar un referente común para realizar la comparación. Una vez que se establece esa relación ya es posible hacer cálculos para establecer la situación más conveniente, incluso para otras opciones de platos.

ACTIVIDAD 4: Formula tareas matemáticas escolares, una por cada uno de los bloques de contenido del currículo de matemáticas de Primaria.

Emplear supone aplicar razonamientos matemáticos y utilizar conceptos, procedimientos y otras herramientas matemáticas con las que dar respuesta a la cuestión planteada. Incluye la realización de cálculos, la transformación de expresiones algebraicas, ecuaciones u otros modelos matemáticos, el análisis de información procedente de gráficos y diagramas, la elaboración de descripciones y explicaciones y, en general, el uso de cualquier herramienta matemática para responder a las cuestiones propuestas. La siguiente tarea destaca esta demanda:

En una tienda de deportes hacen descuentos al comprar dos o más productos. Maribel ha comprado unas zapatillas que están marcadas en 60 € y una mochila que cuesta 30 €. Si finalmente ha pagado 72 €, ¿qué tanto por ciento de descuento le han aplicado? ¿Cuánto dinero se ha ahorrado con respecto al precio original?

En este caso, la tarea exige la realización de cálculos aritméticos para encontrar los datos pedidos. La segunda pregunta se puede responder con una simple resta, pero la primera requiere establecer una relación de proporcionalidad.

ACTIVIDAD 5: Resuelve la tarea del ejemplo y señala los distintos pasos que has dado. Identifica en cada caso los razonamientos, conceptos y procedimientos usados.

Interpretar ocurre cuando se analizan las soluciones o los resultados matemáticos y se aclara su sentido en el contexto de un problema. Incluye la valoración de las soluciones o razonamientos matemáticos con relación al contexto del problema, y el hecho de determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación. Esta demanda se ejemplifica en la siguiente tarea:

Un periodista tiene que estimar el número de personas que han participado en una manifestación a favor de los Derechos Humanos. Los manifestantes ocuparon una calle entera de la ciudad, que tiene una longitud aproximada de 1.000

© Ediciones Pirámide

metros. ¿Cuál de los siguientes números constituye una estimación razonable del número de asistentes?

100 500 10.000 50.000 1.000.000

La exigencia de esta tarea es que los escolares valoren la bondad de varias estimaciones numéricas de acuerdo a una situación planteada. Se trata de eliminar razonadamente algunas opciones, en función de lo que implican, y decidir entre las restantes.

ACTIVIDAD 6: Justifica cuál o cuáles de las estimaciones en la tarea del ejemplo resulta más razonable.

Estas tres fases muestran tres momentos en las actuaciones que las tareas matemáticas pueden exigirle a los resolutores. Como ya hemos dicho, en el capítulo 3 consideraremos otras variables posibles para el diseño o selección de tareas.

ACTIVIDAD 7: Redacta tres tareas matemáticas diferentes para la Educación Primaria, de manera que en la primera la demanda consista en formular, en la segunda consista en emplear y en la tercera en interpretar, de acuerdo a las caracterizaciones anteriores.

CONCLUSIONES

El análisis cognitivo se sustenta sobre tres aportes teóricos claves, que acabamos de presentar. Cada uno de ellos se lleva a efecto mediante técnicas de análisis y síntesis específicas, usa sistemas propios de categorías y proporciona diversas herramientas de trabajo. El análisis cognitivo proporciona conocimientos, desarrolla capacidades y promueve actitudes que son parte indispensable del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas en su trabajo docente. Establecer para cada tema de las matemáticas escolares cuáles son las expectativas de su aprendizaje, cuáles sus limitaciones y cuáles sus oportunidades, contribuye a que el profesor afronte su trabajo de planificación y de implementación de cada tema con conocimiento didáctico fundado y con dominio de las peculiaridades cognitivas de cada tema en cuestión. Ese conocimiento y su manejo en la práctica contribuye al desarrollo de su propia competencia profesional.

Las expectativas de aprendizaje expresan, desde diferentes niveles, lo que se espera que entiendan, desarrollen y apliquen los escolares por razón del aprendizaje alcanzado en su proceso de formación. En el caso de las matemáticas, las expectativas de aprendizaje expresan ciertos usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden concretar y caracterizar en términos del sentido matemático escolar, y que se pueden desarrollar, observar o inferir a partir de las actuaciones de los estudiantes ante determinadas demandas cognitivas.

Entre las posibles técnicas para establecer las expectativas de aprendizaje, el análisis cognitivo se centra expresamente en las siguientes: seleccionar las prioridades de aprendizaje del tema a partir de los focos que estructuran los correspondientes contenidos; enunciar detalladamente los objetivos específicos por cada uno de los focos, en las fases de planificación e implementación; y en tercer lugar, vincular los objetivos enunciados con las competencias terminales, en la fase de evaluación.

Estas técnicas son importantes, ya que se centran en aspectos claves del proceso de enseñanza. Los focos de aprendizaje prioritarios establecen una conexión inicial entre una estructura matemática y aquellos aspectos de ella

© Ediciones Pirámide

que deben destacarse para su aprendizaje. Los objetivos específicos se refieren a las expectativas de aprendizaje que el profesor selecciona para los escolares acerca de un bloque de contenidos o de un tema específico de matemáticas, para un curso o tema concreto, a corto plazo. Las competencias, por el contrario, expresan expectativas formativas a largo plazo, que han de desarrollarse paulatinamente a lo largo de varios cursos y etapas, y mediante el trabajo con diferentes contenidos y temas de matemáticas. En estos casos, las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas muestran el grado de consecución de esas expectativas.

Cuando el profesor maneja diferentes niveles de expectativas de aprendizaje, dispone de criterios para interpretar las directrices sobre objetivos y competencias que se expresan en los documentos curriculares; también puede diseñar con mayor precisión y establecer preferencias para evaluar lo que espera que aprendan unos escolares, acerca de un tema de matemáticas concreto.

La caracterización de las limitaciones de aprendizaje en términos de errores y dificultades brinda también al profesor una importante información acerca de en qué aspectos de la estructura matemática concreta que trabaja en el aula pueden aparecer dificultades, que frenen, ralenticen o desvirtúen el aprendizaje de los escolares. No se trata de abarcar todo el abanico posible de errores que pueden surgir al trabajar en un tema concreto, sino en identificar errores sistemáticos o reiterados, específicos a ese tema. Esa información proporciona al profesor diferentes técnicas para prever cómo presentar determinados conceptos o procedimientos, seleccionar ejemplos y contraejemplos, o incluir en su actividad docente tareas que pongan de manifiesto la existencia de ciertos errores y ayuden a superarlos.

Finalmente, con la información de las expectativas y las limitaciones, el profesor dispone de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar aquellas tareas que habrán de resolver los escolares a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. Si la finalidad es que los escolares logren ciertos objetivos, ese logro ha de mostrarse en la ejecución de tareas que expresan sus capacidades. Estas tareas demandan las actuaciones a los escolares que hemos descrito.

Igualmente, las oportunidades de aprendizaje proporcionan conocimientos, desarrollan capacidades y promueven actitudes que son parte indispensable del conocimiento didáctico del profesor para la planificación e implementación del aprendizaje matemático escolar.

Todo el planteamiento se ha desarrollado en el marco de una visión social y constructiva del conocimiento matemático escolar y desde un enfoque funcional de la propia disciplina. El análisis cognitivo da continuidad a la reflexión introducida en el capítulo 1 sobre el análisis didáctico y el análisis de contenido. El capítulo 3 continúa con el análisis de instrucción, centrado en la enseñanza, dando, a su vez, continuidad a las ideas hasta ahora presentadas. Los capítulos siguientes profundizan y ejemplifican en detalle estas consideraciones.

© Ediciones Pirámide

3 Enseñar las matemáticas escolares

PEDRO GÓMEZ
ISABEL M.ª ROMERO ALBALADEJO

La enseñanza de las matemáticas es un proceso complejo. Para enseñar matemáticas, el profesor debe planificar sus clases, llevarlas a la práctica, gestionar lo que sucede en el aula y evaluar su actuación y la de los escolares. Este capítulo está dirigido a futuros profesores, y nuestro interés se centra en proporcionarles elementos de análisis que permitan guiar tanto la planificación como la observación e interpretación de su implementación.

Existe una diversidad de estilos de enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, algunos profesores enseñan matemáticas explicando la teoría, presentando ejemplos y motivando a los escolares a que resuelvan problemas. Otros se ciñen a seguir el libro de texto, asignar los ejercicios que el libro propone, corregir las respuestas de los estudiantes y consolidar los conocimientos que pueden surgir de esas actividades. En este capítulo centramos la atención en un estilo de enseñanza que pretende ser coherente con las ideas presentadas en el capítulo 2 de este volumen y que consideramos que los futuros profesores deben conocer. De acuerdo con este estilo de enseñanza, el profesor enfoca su atención en proporcionar oportunidades para que los escolares logren los objetivos de aprendizaje que se ha propuesto, y superen sus errores y dificultades. El profesor brinda estas oportunidades de aprendizaje a los escolares al proponerles tareas

© Ediciones Pirámide

que ellos deben abordar, guiándoles y ayudándoles cuando sea necesario durante el proceso.

El término «tarea escolar» se usa con diversos significados en el entorno educativo. Como lo mostraremos más adelante, en este capítulo utilizamos el término «tarea matemática escolar» en un sentido amplio, como una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los escolares. Una tarea incluye, además de su formulación, elementos como el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los escolares y estrategias de interacción entre los escolares y con el profesor. Aunque la enseñanza incluye la planificación de la secuencia de tareas que el profesor propondrá a los escolares en clase, en este capítulo nos centramos únicamente en la complicación que surge y la dificultad que plantea el planificar una tarea matemática escolar y llevarla a la práctica. Por esa razón, no abordaremos otras cuestiones importantes, como el tipo de tareas o las fases de la secuencia de tareas.

El profesor de matemáticas ha de planificar e implementar aquellas tareas que considere que pueden promover eficientemente el aprendizaje de los escolares. Las decisiones que toma sobre qué tareas va a utilizar en clase deben estar fundamentadas y responder a un proceso sistemático que incluye la búsqueda, descripción, análisis, modificación e implementación de dichas tareas. Las decisiones del profesor dependen de su visión de las matemáticas, de la forma en que los escolares pueden aprenderlas y de la forma en que se deben enseñar. En este capítulo asumimos una visión funcional de las matemáticas escolares.

Partimos de que las matemáticas, además de tener una dimensión abstracta, deben ser útiles para la resolución de problemas prácticos en contextos específicos. Vemos las matemáticas como una herramienta con la que el aprendiz puede abordar problemas de la vida cotidiana en contextos diversos. También consideramos que el escolar aprende matemáticas al resolver problemas prácticos, y que ese aprendizaje tiene lugar a través de procesos de construcción mediados socialmente. Entendemos que los escolares aprenden principalmente cuando, al abordar y resolver problemas, interactúan y se comunican con otros escolares y con el profesor, negociando significados, llegando a acuerdos sobre la solución de dichos problemas y justificando su solución. Es decir, los escolares no sólo aprenden matemáticas trabajando individualmente, recibiendo y registrando información que después deben repetir.

Basándonos en las ideas anteriores, en este capítulo buscamos destacar la importancia de guiar a los escolares en un aprendizaje contextualizado, a través de tareas matemáticas escolares significativas que se ubiquen en contextos reales. Para ello, abordamos algunos de los conocimientos que consideramos necesarios para la búsqueda, análisis, descripción, modificación e implementación de tareas matemáticas escolares, y proponemos estrategias que pueden contribuir a las competencias de planificación e implementación del profesor. Estos conocimientos incluyen el conocimiento del contenido de las matemáticas escolares, al que se refieren las tareas (véase, para ello, los contenidos de matemáticas escolares trabajados en el libro *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria)* y se fundamentan en los conocimientos disponibles para guiar el aprendizaje de los escolares (véase capítulo 2 de este libro). Presentamos las ideas clave que guían la planificación e implementación de una tarea. Para contribuir a su comprensión, ejemplificamos estas ideas clave mediante un tema concreto de las matemáticas escolares en un nivel específico: la medida de magnitudes en segundo ciclo de Primaria.

© Ediciones Pirámide

1. IDEAS CLAVE PARA LA PLANIFICACIÓN DE UNA TAREA

Planificar una tarea implica buscar tareas candidatas, describir sus elementos, analizarlas y modificar aquello que se considere necesario para seleccionar aquellas tareas que se llevarán a la práctica. Estos son los procesos que aparecen en el centro del esquema de la figura 3.1.

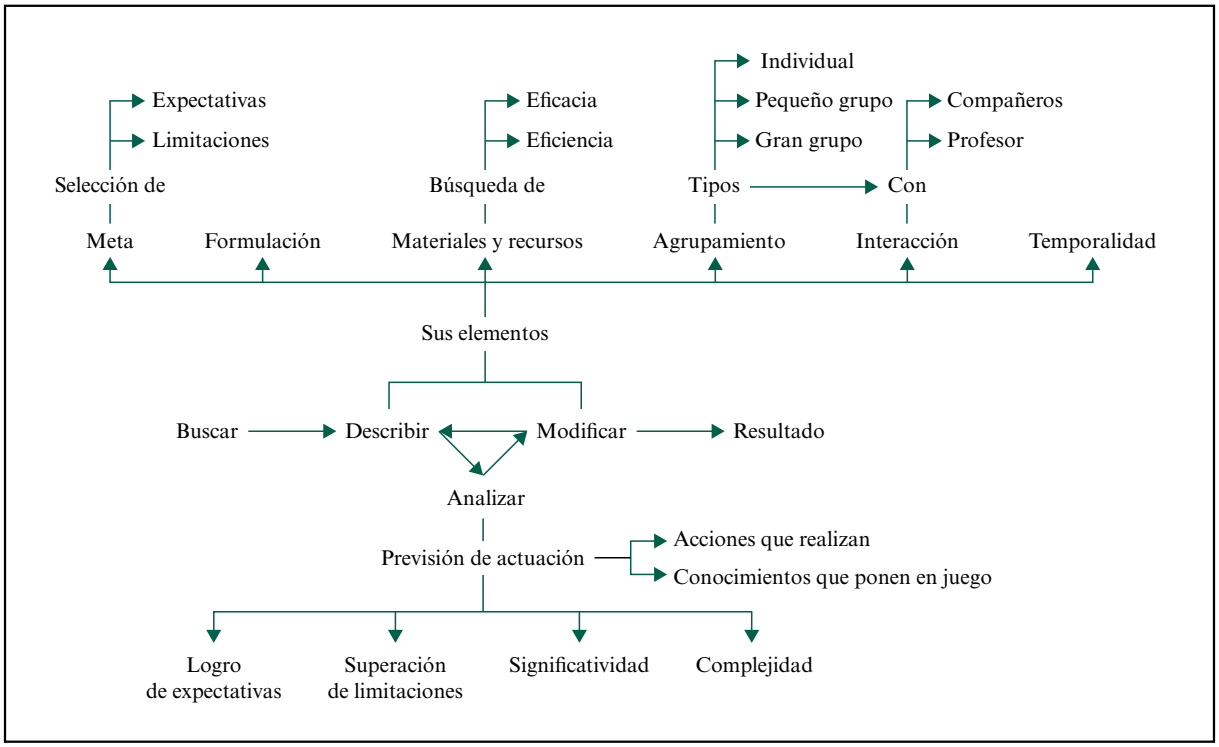


Figura 3.1.—Ideas clave de la planificación de una tarea.

© Ediciones Pirámide

El proceso es cíclico: debemos describir los elementos de una tarea para poder analizarla y, con motivo de su análisis, podemos decidir modificar algunos de sus elementos. Los elementos de una tarea que aparecen en la parte superior del esquema son su meta (aquellos aspectos de las expectativas y limitaciones de aprendizaje que pretende abordar), su formulación (las instrucciones de actuación que se proporcionan a los escolares), los materiales y recursos que involucra (para los que hay que atender a su eficacia y eficiencia), los tipos de agrupamiento de los escolares que puede promover (individual, pequeño o gran grupo), el tipo de interacción que genera entre los compañeros y con el profesor, y su temporalidad.

Para analizar una tarea, debemos prever qué acciones puede promover en los escolares cuando la aborden y qué conocimientos pueden ellos poner en juego al hacerlo. Esta información permite establecer en qué medida y de qué forma la tarea proporciona oportunidades para que se logren las expectativas y se superen las limitaciones de aprendizaje, cómo es de significativa la tarea para los escolares y qué nivel de complejidad tiene. Los resultados del análisis de la tarea pueden motivar el interés por modificarla en uno o más de sus elementos, dando lugar a una nueva tarea que se debe analizar. Al final del ciclo, seleccionamos aquella versión de la tarea que, de acuerdo con el resultado de su análisis, contribuye apropiadamente al logro de las expectativas de aprendizaje, a la superación de las limitaciones de aprendizaje, tiene un nivel de complejidad adecuado dentro de la secuencia de tareas y es significativa para los estudiantes.

A lo largo del capítulo describimos y ejemplificamos estos procesos y elementos. Para ello, comenzamos por establecer unas expectativas y limitaciones de aprendizaje para un tema concreto —la medida de las magnitudes—, que usaremos como ejemplo.

2. PLANIFICACIÓN DE TAREAS ESCOLARES Y EXPECTATIVAS Y LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

El resultado de la planificación de una unidad didáctica es la descripción detallada de una secuencia de tareas matemáticas escolares. Su propósito es contribuir eficientemente al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de las limitaciones de aprendizaje que el profesor ha establecido previamente. Este trabajo técnico de planificación debe partir de un análisis detallado del contenido sobre el que se va a trabajar. El análisis de contenido del tema proporciona información útil para el análisis de sus aspectos cognitivos. En este capítulo centramos nuestra atención en los objetivos de aprendizaje establecidos para el tema que se quiere abordar —expectativas de aprendizaje—, en los errores en los que los estudiantes pueden incurrir y en las dificultades que ellos pueden manifestar cuando aborden las tareas que se les propongan —limitaciones de aprendizaje.

A continuación ilustraremos lo expuesto anteriormente, concretando en un tema matemático —la medida de magnitudes— y en un ciclo de la enseñanza Primaria —el segundo—. A partir de directrices curriculares recientes, del estudio del contenido sobre medidas y magnitudes realizado por González y Gómez en el libro *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* y de las consideraciones realizadas en los capítulos 7 y 13 del presente volumen, hemos identificado un conjunto de expectativas y limitaciones de aprendizaje que exponemos a continuación, y que servirán de base para desarrollar el ejemplo que ayudará a comprender

© Ediciones Pirámide

los planteamientos teóricos expuestos a lo largo del tema.

2.1. Tareas escolares y objetivos de aprendizaje

1. Percibir las magnitudes longitud, peso/masa, capacidad, tiempo y superficie como atributos medibles.
2. Realizar mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales en contextos cotidianos.
3. Conocer y convertir las unidades de medida convencionales de uso cotidiano, así como sus múltiplos y submúltiplos. Utilizarlas en contextos reales.
4. Medir superficies mediante unidades no convencionales (cuadrículas y baldosas) y convencionales, en cuadrados y rectángulos.
5. Establecer la relación entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida.
6. Elegir la unidad y el instrumento más adecuados para la expresión de una medida.
7. Utilizar la notación de unidades de uso frecuente y conocer su significado.
8. Elaborar y utilizar estrategias personales para medir.
9. Utilizar estrategias apropiadas para estimar medidas de objetos de la vida cotidiana.
10. Explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos y las estrategias utilizadas en la medición. Utilizar vocabulario adecuado.
11. Resolver problemas de medida en contextos familiares y cercanos al alumnado.
12. Explicar el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. Contrastar puntos de vista.
13. Tener interés por conocer y utilizar la medida y por expresar los resultados de las mediciones, manifestando las unidades utilizadas.

2.2. Tareas escolares y limitaciones de aprendizaje

Organizamos las limitaciones de aprendizaje en dificultades y errores. A continuación enumeramos algunas de las dificultades y errores que hemos identificado para la medida de magnitudes.

Dificultades del aprendizaje de la medida

1. Dificultad para elegir instrumentos y unidades adecuadas para una situación de medida.
2. Dificultades en los procesos de estimación.
3. Dificultades en la explicación de los procesos seguidos al medir y de las estrategias utilizadas.
4. Dificultades al entender el enunciado de un problema de medida.

Errores en el aprendizaje de la medida

1. Errores en la iteración y en el recuento de unidades de medida.
2. Errores en los procedimientos de medición y en la lectura de instrumentos de medida.
3. Desconocimiento del valor de unidades de medida de uso frecuente.
4. Expresión del resultado de la medición únicamente en términos numéricos, olvidando que la unidad de medida es im-

© Ediciones Pirámide

prescindible para completar el significado del resultado.

5. Falta de interés por asegurarse de que los resultados de una medición son razonables.
6. Utilización de vocabulario inadecuado o falta de vocabulario apropiado para expresar ideas en torno a la medida.
7. Errores en las estrategias y los procedimientos de resolución de problemas de medida.
8. Errores de cálculo al resolver situaciones y problemas de medida.

ACTIVIDAD 1: Para las actividades que se realizarán a lo largo de este tema se recomienda que los estudiantes para maestro trabajen en grupos de cuatro personas.

Cada grupo escogerá uno de los temas del currículo de Educación Primaria que se proponen en este libro y seleccionará un contenido concreto del mismo. A continuación, decidirá en cuál de los tres ciclos desea centrar la búsqueda y descripción de tareas matemáticas. Haciendo uso de la información del tema en cuestión y de las directrices curriculares más recientes, elaborará una lista de expectativas y limitaciones de aprendizaje para el contenido elegido.

3. BÚSQUEDA DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Una vez que se han establecido unas expectativas y las limitaciones de aprendizaje, ¿qué tareas pueden contribuir a su logro y superación? ¿Dónde encontrarlas, cómo seleccionarlas, analizarlas y modificarlas? Dada la diversidad de recursos a los que el profesor tiene acceso actualmente, abordar estas preguntas no implica diseñar cada tarea desde su comienzo. Por el contrario, el problema se centra en el análisis, selección y modificación de las tareas matemáticas escolares que el profesor puede encontrar y que considera que pueden contribuir al logro de sus propósitos.

¿Dónde identificar las tareas candidatas a ser analizadas, seleccionadas y modificadas? La biblioteca escolar, las revistas de divulgación, el seminario de profesores del centro educativo y la información disponible en Internet son algunas de las fuentes posibles de tareas. Otra fuente muy común de tareas es el libro de texto. Las tareas incluidas en los libros de texto tienen la ventaja de que se ajustan a los programas vigentes y suelen indicar algunas conexiones con la realidad. Sin embargo, adolecen de algunas limitaciones, entre las que podemos señalar las siguientes:

- Falta frecuente de actividad manipulativa.
- Planteamiento de trabajo dirigido al alumno individual, sin tener en cuenta formas de agrupación alternativas ni interacciones entre el alumnado.
- Foco en hechos y procedimientos algorítmicos, en detrimento del desarrollo de habilidades, estrategias propias y conexiones.
- Búsqueda de respuestas correctas, en lugar del fomento de una actitud exploratoria e inquisitiva.

Así, por ejemplo, dentro del tema que nos ocupa es frecuente que la medida de la longitud y de la superficie se inicie en el libro de texto mediante algunas tareas referidas al uso de unidades no estándar. En dichas tareas, ubicadas normalmente en contextos cotidianos, la unidad no estándar aparece ya iterada en dibujos, y se espera que los escolares hagan recuento de unidades y comparaciones entre ellas. Rara vez los escolares tienen la oportunidad de medir en contextos reales, eligiendo unidades apropiadas y realizando procesos de iteración de la unidad. Estos procesos son una fuente interesante de errores. Por otra parte, la comparación de uni-

© Ediciones Pirámide

dades no se plantea en un contexto problemático, sino como una orden que se debe ejecutar. Las unidades estándar se tratan poniendo un énfasis excesivo en el cambio de unidades, así como en la resolución de problemas aritméticos con datos de medidas que ya vienen dados de antemano en objetos dibujados.

Por tanto, aunque el libro de texto es una fuente natural de tareas, conviene tener en cuenta que cada vez hay más material en Internet, bien en páginas institucionales (http://recursos-tic.educacion.es/descartes/web/, del proyecto Descartes del MEC), de sociedades de profesores (http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html, http://thales.cica.es/) e incluso de iniciativas de centros y grupos particulares de profesores. Existen también manuales escritos por especialistas en distintos temas y artículos en revistas de profesorado (http://thales.cica.es/epsilon/, http://www.sinewton.org/numeros/).

Una vez que el profesor ha identificado un conjunto de tareas que pretende llevar a la práctica, debe abordar su descripción y análisis, con el objeto ya sea de seleccionar y modificar aquellas que pueden contribuir de manera eficiente al logro de sus propósitos, o de analizar su validez en su implementación. Este análisis implica, en primera instancia, concretar qué queremos decir con «tarea matemática» y establecer sus principales elementos.

ACTIVIDAD 1: Atendiendo al contenido y ciclo seleccionados por el grupo, cada miembro buscará cinco tareas en fuentes distintas del libro de texto y seleccionará una que atienda al menos a alguna de las expectativas de aprendizaje y a alguna de las limitaciones formuladas con anterioridad. Se debe elegir una tarea que se considere rica, en términos, por ejemplo, de contextualización, materiales empleados, agrupamiento, dinámica de trabajo y apertura (si la tarea es o no rutinaria y si permite más de una forma de ser resuelta).

4. TAREA MATEMÁTICA ESCOLAR

Una *tarea matemática escolar* es una demanda estructurada de actuación que el profesor proporciona a los escolares con carácter intencional. Con motivo de una tarea, profesor y escolares realizan *actividades,* que los escolares pueden desarrollar de manera individual o en grupo. Al asignar una tarea, el profesor debe tener un propósito —que contribuya al logro de uno o más objetivos de aprendizaje y/o a la superación de uno o más errores y dificultades—. Al abordar una tarea, los escolares son interpelados por ese propósito, al que responden con una intención —resolverla—. Las actividades del profesor y de los escolares reflejan su actuación en la búsqueda de sus propósitos e intenciones. ¿Cómo puede el profesor proponer e implementar tareas que promuevan en los escolares actuaciones que contribuyan a los propósitos que se había fijado? Para abordar esta pregunta consideramos dos procedimientos: la descripción de una tarea y el análisis de una tarea.

4.1. Descripción de una tarea matemática escolar

Se tiende a pensar que una tarea matemática escolar queda descrita con su formulación. Siguiendo con nuestro ejemplo, se puede considerar que las formulaciones de las figuras 3.2 y 3.3, típicas de los libros de texto, son descripciones adecuadas de tareas.

No obstante, la descripción de una tarea es más que su formulación. A la hora de planificar una clase, o cuando observamos y analizamos su implementación, debemos tener en cuenta otros elementos que caracterizan una tarea y que condicionan su contribución al logro de los objetivos de aprendizaje y a la supe-

© Ediciones Pirámide

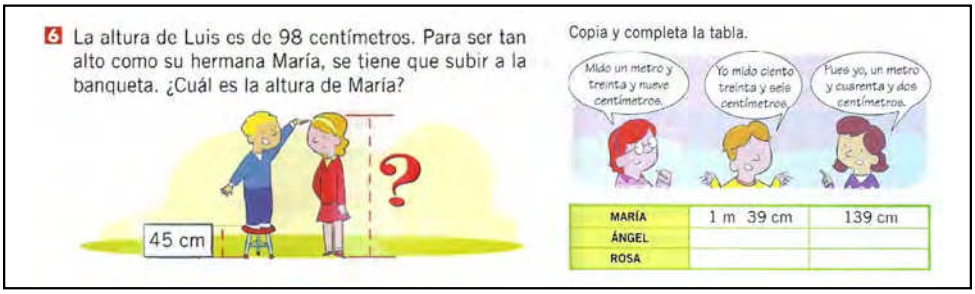


Figura 3.2.—Formulación de tareas para la magnitud longitud en un libro de texto.

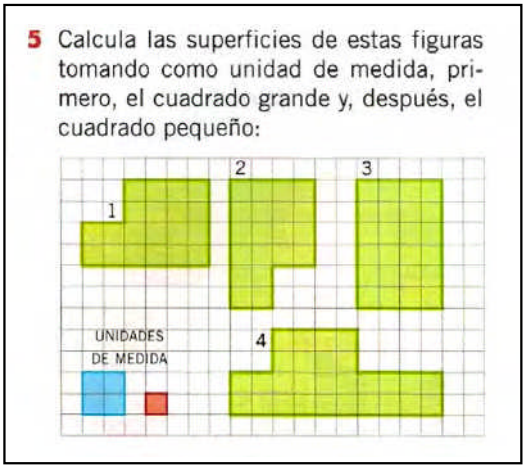


Figura 3.3.—Formulación de una tarea para la magnitud de superficie en un libro de texto.

ración de los errores y dificultades que puedan presentarse.

En este capítulo consideramos seis elementos para describir una tarea matemática escolar: *a*) su meta; *b*) su formulación; *c*) los materiales y recursos que incluye; *d*) los tipos de agrupamiento que prevé; *e*) las formas de interacción que promueve, y *f*) su temporalidad (figura 3.4). Más adelante, al analizar las tareas, también tendremos en cuenta su complejidad, su significatividad y su contribución al logro de los objetivos de aprendizaje y a la superación de los errores de los escolares.

A continuación describimos estos elementos en el ejemplo que nos ocupa.

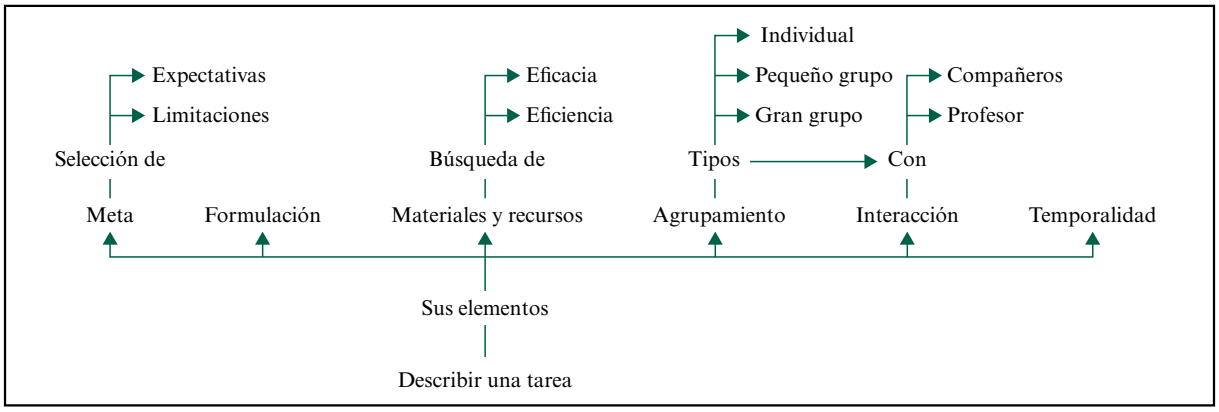


Figura 3.4.—Elementos para describir una tarea matemática escolar.

© Ediciones Pirámide

4.2. Meta

La *meta* de una tarea matemática escolar resume los propósitos que el profesor asigna a la tarea. Estos propósitos se refieren a aquellos aspectos de los objetivos de aprendizaje a los que la tarea pretende contribuir, y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea contribuya a superar. Si analizamos las tareas de la figura 3.2, que tratan la magnitud longitud, podemos observar que la primera tarea aborda los objetivos 1 (para la magnitud longitud), 7, 11, 12 (dependiendo de la corrección que se promueva de esta tarea) y 13, así como los errores 5, 9 (dependiendo del tipo de corrección que se promueva), o dificultad 4 y error 7. En la segunda tarea, sobre la magnitud longitud, se abordan los objetivos 1 y 3 (para la magnitud longitud) y los errores 3 y 8, debido a la dificultad 4. Por otro lado, la tarea sobre superficie (figura 3.3) aborda los objetivos 1 (para la magnitud superficie), 4 y 5 (dependiendo de la corrección que se promueva), así como los errores 1, 4, 7 y 8.

Como vemos, una tarea matemática escolar difícilmente puede abordar todas las expectativas y limitaciones de aprendizaje de un tema. Cada tarea centra su foco de atención en algunas de esas expectativas y limitaciones. Por esa razón, resulta importante establecer cuáles son esas expectativas y limitaciones que se pretenden abordar (planificación) y tenerlas en cuenta durante su implementación.

4.3. Formulación de la tarea matemática escolar

La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los escolares y que especifica lo que espera que ellos realicen. Este texto puede contener uno o más apartados. En general, la formulación de la tarea matemática describe un contexto, proporciona una información inicial y requiere que los escolares produzcan una información final como su solución.

En los ejemplos que hemos presentado, las tareas se formulan tal como aparecen en las figuras 3.2 y 3.3. En el caso de las tareas matemáticas sobre longitud, el profesor y los escolares habrán trabajado previamente en clase las principales unidades de longitud y la relación entre ellas, a las que habrán dotado de significado.

4.4. Materiales y recursos

Un recurso es cualquier medio que se pueda emplear en el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático determinado, aunque no haya sido diseñado específicamente para ello. Los materiales se distinguen de los recursos porque se diseñan con fines didácticos. La tiza, la pizarra (tradicional o electrónica), el papel y el lápiz son recursos, mientras que el geoplano o el dominó de fracciones son materiales diseñados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El lector podrá encontrar en los capítulos 9 al 15 de este libro sugerencias sobre materiales y recursos apropiados para los diferentes temas de las matemáticas escolares de la Educación Primaria. Muchas tareas matemáticas escolares implican el uso de materiales y recursos.

Los documentos curriculares de matemáticas incluyen los materiales y recursos como elementos a tener en cuenta en los objetivos específicos—en relación con las competencias a las que éstos pueden contribuir—, en las orientaciones metodológicas y en los criterios de evaluación. Resulta natural preguntarse acerca de qué materiales y recursos se pueden y/o deben usar con

© Ediciones Pirámide

una tarea matemática, por qué se deben usar, para qué usarlos y cómo usarlos. Sugerimos dos criterios para responder a estas preguntas: eficiencia y eficacia. Presentamos a continuación algunas reflexiones acerca de estos dos criterios, que ejemplificaremos más adelante.

La eficiencia se refiere a la disponibilidad, economía y buen uso de los materiales y recursos. No tiene sentido que diseñemos una tarea que supone que cada escolar tendrá un ordenador para trabajar en clase, si el centro no tiene esa infraestructura. En ese sentido, los «rincones» de materiales y recursos en el aula promueven su uso eficiente, dado que están permanentemente disponibles (figura 3.5). En algunas ocasiones, los materiales y recursos son demasiado sofisticados y requieren de procesos de preparación y entrenamiento de profesor y escolares. La eficiencia también tiene que ver con el tiempo que se requiere para realizar la tarea. En algunas ocasiones, el uso de materiales y recursos puede implicar que la resolución de la tarea matemática tome más tiempo del que se tiene disponible. Un diseño eficiente de una tarea es aquel que requiere la menor cantidad de materiales y recursos para lograr nuestros propósitos.

Figura 3.5.—Rincones de recursos y materiales en el aula.

¿Cómo podemos hacer un uso eficaz de los materiales y recursos? Responder a esta pregunta implica reflexionar sobre cómo pueden contribuir los materiales y recursos al logro de los propósitos que se tienen con una tarea matemática. Los materiales y recursos pueden jugar el papel de intermediarios entre el conocimiento matemático y el de los escolares, y servir de modelos de las ideas matemáticas, proporcionando un paso de lo concreto a lo abstracto. También pueden fomentar el análisis de información, el planteamiento de interrogantes, la búsqueda de estrategias propias, el descubrimiento de propiedades y relaciones y el análisis y discusión de resultados. Adicionalmente, los materiales y recursos pueden generar motivación e interés en los escolares. En general, cuando se introduce un material o un recurso en la clase de matemáticas los escolares se muestran curiosos, deseosos de manipular y explorar y mucho más dispuestos a resolver cuestiones matemáticas con su ayuda.

Las tareas matemáticas que hemos presentado como ejemplo incluyen el uso de tres recursos básicos: el libro de texto, lápiz y papel. Adicionalmente, la tarea de superficie incluye el uso del papel cuadriculado. En la segunda parte de este capítulo veremos que, a partir de una misma formulación, es posible diseñar tareas matemáticas escolares diferentes dependiendo de los materiales y recursos que se propongan para su resolución. Las tareas serán diferentes porque, aun teniendo la misma formulación, su resolución con materiales o recursos implica actividades de aprendizaje diferentes por parte de los escolares.

4.5. Agrupamiento

En muchas clases de matemáticas existe la tendencia a plantear el aprendizaje preferente-

© Ediciones Pirámide

mente de forma individual. El profesor da explicaciones, propone unas tareas matemáticas y solicita que cada escolar las resuelva por sí solo en su cuaderno. A lo sumo, se permite un intercambio espontáneo con los compañeros durante la realización de las tareas, para contrastar soluciones y para pedir y proporcionar alguna ayuda. Esta podría ser la manera de implementar las tareas anteriormente formuladas. Pero, ¿es la única manera de aprender matemáticas? ¿Es siempre la más eficaz?

Como se pone de manifiesto en este libro, los escolares aprenden cuando se enfrentan a dificultades e intentan superarlas, cuando incurren en errores, así como cuando constatan que el conocimiento que dio lugar a esos errores no era apropiado para el contexto de la tarea y logran reorganizar su conocimiento de acuerdo con la nueva situación. En este sentido, la superación de los errores se constituye en un elemento fundamental para el aprendizaje. Por consiguiente, las tareas deben promover la puesta en juego del conocimiento matemático de los escolares, inducirles a que reconozcan el carácter parcial de ese conocimiento y motivarlos a que reorganicen ese conocimiento con motivo de su experiencia con la tarea.

Estos propósitos se logran, en algunos casos, proponiendo tareas matemáticas que se resuelven individualmente, en las que el profesor ponga en evidencia los errores en los que cada uno de los escolares ha incurrido. No obstante, como lo indicamos anteriormente, los escolares también aprenden cuando, al abordar problemas, interactúan entre sí y con el profesor, negocian significados y llegan a acuerdos sobre la validez de la solución a los problemas. Por consiguiente, el planteamiento del trabajo en parejas y en pequeños grupos tiene sentido para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Gracias a este trabajo colaborativo se pueden afrontar dificultades que el trabajo individual no siempre resuelve. El trabajo en grupos pequeños sienta las bases de una puesta en común en gran grupo para contrastar puntos de vista, procedimientos y soluciones a las tareas propuestas. Así, diferentes formas de agrupamiento pueden generar diferentes formas de interacción entre los escolares y de los escolares con el profesor, y es a través de esas interacciones que los escolares aprenden. De acuerdo con este planteamiento, en la tarea matemática para el aprendizaje de la magnitud superficie podemos proponer que los estudiantes trabajen por parejas y darles instrucciones para que contrasten los resultados y las estrategias de recuento entre los miembros de cada pareja. Esto puede dar lugar a interacciones que comentaremos en el siguiente apartado.

Por otra parte, una misma tarea matemática puede usar diferentes formas de agrupamiento a lo largo de su implementación en clase. Debemos entonces preguntarnos: ¿qué tipos de agrupamiento son apropiados para una tarea dada y en qué momento y de qué forma se pueden usar? La respuesta a esta pregunta dependerá de la meta de la tarea y de la forma en que el profesor prevé que la interacción y la comunicación que se propiciará con motivo del agrupamiento contribuye a lograrla.

4.6. Comunicación e interacción en clase

Diferentes formas de agrupamiento dan lugar a diferentes formas de relación entre los estudiantes y a distintas formas de comunicarse durante la resolución de una tarea. La interacción se da entre diferentes actores: profesor, escolar, grupo pequeño y grupo de clase. Aprender matemáticas implica ser capaz de proponer soluciones a un problema que implica las matemáticas, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar

© Ediciones Pirámide

significados para llegar a acuerdos racionalmente fundados. Por consiguiente, para aprender matemáticas es necesario que el escolar interactúe con sus compañeros y con el profesor. Esta interacción se puede dar, ya sea en parejas o grupos pequeños, cuando los escolares abordan un problema en la búsqueda de la solución, o en gran grupo, cuando se comunica la solución y se argumenta sobre su validez con todos los compañeros y el profesor.

El profesor debe inducir las interacciones más convenientes, guiándose por la meta de la tarea. Debe buscar, con los recursos disponibles, que las interacciones promuevan la puesta en juego de los conocimientos matemáticos de los escolares, la superación de las dificultades, el análisis de los errores en los que ellos pueden incurrir y la consiguiente reestructuración de esos conocimientos. De esta forma, puede utilizar la interacción como medio para lograr sus propósitos.

En las tareas que mostramos como ejemplos para el aprendizaje de la magnitud longitud, contemplamos una interacción habitual en las clases de matemáticas que implica los siguientes pasos: *a*) el docente pide a un alumno que las corrija en la pizarra; *b*) si el resultado es correcto, los demás compañeros contrastan con el suyo y corrigen, si es necesario; *c*) si el resultado es incorrecto, el docente pregunta a los escolares si encuentran algún fallo y pide a otro alumno que explique cuál es el error y dé la solución correcta.

En el caso de la tarea para aprender la magnitud superficie se puede plantear una propuesta más desarrollada en cuanto a la interacción, al introducir instrucciones que estimulen y regulen el trabajo en parejas, y formular preguntas para el debate en gran grupo o puesta en común. Así, al proponer la tarea a las parejas, el profesor les indica que deben contrastar con el compañero los resultados y las estrategias que han utilizado para contar todos los cuadrados pequeños. Algunos alumnos pueden ser descuidados al copiar las figuras en sus cuadernos y pueden modificar la forma. También pueden idear distintas estrategias de recuento, como dividir las figuras en trozos rectangulares, multiplicar los cuadrados de la base por los de la altura para los distintos trozos y luego sumarlos, o bien multiplicar por cuatro el número de cuadrados grandes en cada figura. Estas cuestiones pueden salir a la luz al contrastar los resultados, pudiendo el profesor observar los casos interesantes mientras las parejas trabajan, para discutirlos posteriormente en la puesta en común. Durante la puesta en común, el profesor pide a una pareja distinta que haga cada figura, procurando que explicite la estrategia que ha utilizado para el recuento. Se comparan resultados. Cuando todas las figuras han sido medidas en las dos unidades, se discute en gran grupo en torno a las preguntas: «¿qué ocurre con el resultado de la medida cuando la unidad de medida es más grande?», «¿cuántas veces es más grande la unidad mayor que la menor en este caso?», «¿hay alguna relación de este tipo entre los resultados de las medidas?», «¿qué ocurriría si la unidad de medida más grande fuera el doble de la pequeña?», «¿cómo podéis aseguraros?».

Los debates en los que participa toda la clase pueden servir de modelo para conversaciones en los pequeños grupos. El profesor puede aprovechar ambos momentos para alentar y apoyar el uso de lenguaje matemático por parte de los escolares, tomar nota de las principales dificultades y errores en que ellos incurren para intervenir adecuadamente, y observar las ocasiones en que sus alumnos realizan aportaciones interesantes e incluso sobrepasan las expectativas previstas, poniendo en juego capacidades que no había tenido en cuenta en sus previsiones. Así, cuando el profesor da a los alumnos oportunidades para expresarse y pro-

© Ediciones Pirámide

mueve la comunicación matemática en el aula (formulando preguntas adecuadas), tiene la posibilidad de saber cómo piensan los alumnos y de ajustar en consecuencia las actividades de aprendizaje. En el apartado 6, a lo largo del desarrollo del ejemplo, ilustraremos con más detalle estas ideas.

4.7. Temporalidad de la tarea matemática escolar

El profesor puede prever que una tarea matemática se desarrolle como una secuencia de «momentos». En cada momento el profesor puede establecer qué parte de la tarea se realiza, qué materiales y recursos se utilizan, de qué manera se agrupan los escolares y qué formas de interacción desea promover. Para ello tiene que decidir qué período de tiempo considera que se debe dedicar a cada momento y en qué orden. La temporalidad de la tarea es la descripción de estos momentos en términos de las cuestiones anteriores.

Siguiendo con nuestros ejemplos, la tarea matemática de medida llevaría un momento de explicación, otro de ejecución y otro de corrección. La tarea de superficie tendría dos momentos: el de ejecución y el de puesta en común.

ACTIVIDAD 1:

a) Cada estudiante describirá la tarea que ha seleccionado en la actividad del apartado 3, atendiendo a: *a*) su meta (expectativas y limitaciones de aprendizaje a las que apunta); *b*) su formulación; *c*) los materiales y/o recursos que emplea; *d*) la agrupación y las interacciones que promueve dentro del aula (explícita o implícitamente), y *e*) su temporalización.
b) A continuación, el trabajo hecho por cada miembro se pondrá en común dentro del grupo. Cada miembro del grupo expondrá la descripción de la tarea que seleccionó, así como las razones para su elección. El grupo resumirá el resultado de comparar las diferentes descripciones y hará una reflexión sobre la frecuencia y detalle con los que aparecen los diferentes elementos que caracterizan una tarea.
c) El formador puede realizar una puesta en común a partir del trabajo realizado por distintos grupos. En ella pueden tratarse cuestiones como: las posibles dificultades a la hora de establecer expectativas y limitaciones de aprendizaje para contenidos concretos de las matemáticas escolares, posibles fuentes interesantes para encontrar tareas matemáticas de Primaria, elementos de las tareas que son más o menos tenidos en cuenta en las formulaciones habituales, razones por las que los estudiantes para maestro encuentran significativas determinadas tareas, etc.

ACTIVIDAD 2: Descripción de la tarea «Lucho el ciclista» en los grupos. Esta tarea se encuentra en el siguiente enlace http://cl.ly/2n0o3z1b3S26. Cada grupo, trabajando conjuntamente, describirá esta tarea siguiendo las indicaciones de la actividad 1. Cada grupo presentará una reflexión sobre las similitudes y diferencias en la descripción de esta tarea y las tareas que describieron en el punto anterior.

5. ANÁLISIS DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Una vez que hemos descrito una tarea, ¿cómo podemos saber que se trata de una tarea matemática «adecuada»? ¿Qué significado asignamos a la «adecuación de una tarea» y cómo determinamos su grado de adecuación? En este capítulo hemos propuesto que el propósito de las tareas consiste principalmente en contribuir al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de las limitaciones de aprendizaje de los escolares. Para establecer en qué medida una

© Ediciones Pirámide

tarea matemática escolar contribuye a esos propósitos, debemos analizarla desde la perspectiva de las previsiones del profesor sobre cómo se desarrollará cuando se implemente. Estas previsiones nos permitirán establecer en qué medida la tarea contribuye al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de las limitaciones de aprendizaje, su significatividad y su complejidad (figura 3.6). Describimos inicialmente estas ideas y después las ejemplificamos con las tareas matemáticas escolares sobre longitud y superficie que hemos considerado anteriormente.

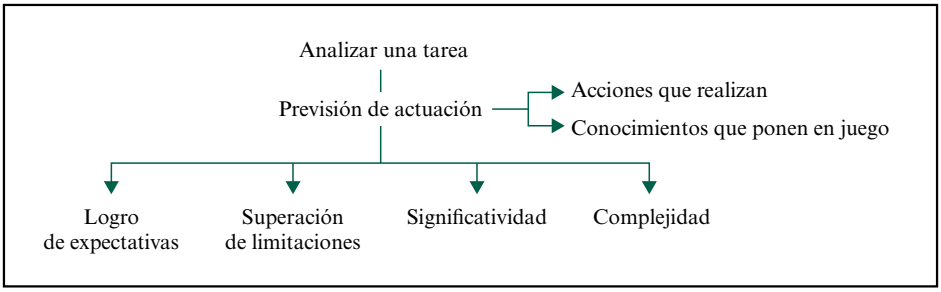


Figura 3.6.—Análisis de una tarea matemática escolar.

Para prever la actuación de los escolares ante una tarea es necesario que el profesor establezca (prevea) los requerimientos que la tarea impone en las actividades que los escolares van a realizar cuando la aborden. Estos requerimientos se refieren a los conocimientos específicos que los escolares pueden activar en cada paso de su resolución. Para ello, proponemos que el profesor aborde y resuelva la tarea matemática como si fuera un escolar. Este proceso implica conjeturar sobre el conocimiento previo de los escolares y describir, paso a paso, las acciones que los escolares pueden realizar y los conocimientos que pueden activar. Estos conocimientos pueden ser válidos y suponer un paso correcto en la resolución de la tarea, o pueden ser conocimientos parciales que den lugar a un error o que bloqueen su continuación. Además, como muestra la experiencia, una tarea admite diferentes modos de resolución. Es decir, los escolares pueden abordarla con secuencias diferentes de acciones. Las previsiones del profesor deben incluir entonces la lista ordenada de posibles acciones (correctas e incorrectas) de los escolares y los correspondientes conocimientos (válidos y parciales) que los escolares pueden activar al abordar la tarea, en cada caso.

La lista de previsiones sobre una tarea matemática proporciona información para analizarla. Al identificar las acciones y los conocimientos que los escolares pueden activar al abordar la tarea, el profesor podrá establecer en qué medida y de qué forma, al ayudar a desarrollar capacidades, la tarea contribuye al logro de los objetivos de aprendizaje. El profesor también podrá establecer a qué competencias contribuyen los objetivos y en qué medida (véase capítulo 2). Por otro lado, el análisis de las previsiones le proporcionará información sobre los errores en los que los escolares pueden incurrir y las dificultades de las que estos errores pueden surgir, permitiendo que el profesor identifique cómo la tarea contribuye a su superación.

Con base en el análisis de las previsiones, el profesor también puede establecer en qué medi-

© Ediciones Pirámide

da la tarea matemática es significativa para los escolares. Para ello, debe analizar si la tarea parte de conocimientos y situaciones conocidos por los escolares. Ello requiere de conocimientos y acciones que pueden activar con esos conocimientos previos, constituye un reto que los motiva a actuar y a aprender, y permite que puedan reconocer en qué medida la han resuelto.

El profesor debe ordenar las tareas que configuran la unidad didáctica de una manera coherente. Cada tarea matemática debe ser un desafío para los escolares, en el sentido de que no implique tan sólo la aplicación de un procedimiento rutinario. Pero los escolares deben, al mismo tiempo, percibir que pueden abordar la tarea. En otras palabras, el nivel de complejidad de una tarea debe estar acorde con los conocimientos y capacidades que los escolares tienen en el momento de abordarla. El análisis de las previsiones sobre los requerimientos de una tarea proporciona información que permite establecer la complejidad de cada tarea matemática y compararlas entre sí. Para abordar el análisis de la complejidad de una tarea nos basamos en los tres niveles propuestos por PISA para establecer la complejidad de las preguntas del estudio: Reproducción, Conexión y Reflexión.

En el nivel de Reproducción incluimos aquellas tareas matemáticas que son familiares para los escolares y que requieren de conocimientos ya utilizados en clase. Es el caso, por ejemplo, de la realización de operaciones sencillas, la puesta en juego de procedimientos ya practicados o la aplicación de algoritmos conocidos. Las tareas que se asignan al nivel de Conexión requieren que el escolar interprete sus instrucciones y establezca conexiones —por ejemplo, entre diferentes sistemas de representación, entre diferentes conceptos o entre el modelo matemático y la situación en la que se presenta la tarea—. Por tanto, van más allá de los ejercicios rutinarios. Finalmente, con las tareas del nivel de Reflexión el escolar debe reflexionar para abordarlas. Tiene que ser capaz de relacionar diversos conceptos y conocimientos, realizar generalizaciones, y comunicar y justificar su solución. Mientras que las tareas del nivel de Reproducción se conocen usualmente como ejercicios, se usa el término problema para referirse a las tareas de los niveles de Conexión y Reflexión.

6. ANÁLISIS DE LAS TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES DE LONGITUD Y SUPERFICIE

A continuación analizamos las tareas de longitud y superficie que hemos presentado como ejemplos (figura 3.2 y 3.3), utilizando las ideas que acabamos de describir.

6.1. Tareas de longitud (figura 3.2)

Podemos concretar la contribución de las tareas de longitud al logro de los objetivos en las siguientes cuestiones.

- En la primera actividad los escolares han de resolver un problema aritmético, contextualizado en el cálculo de la medida de una cantidad de longitud: la altura de personas.
- En la segunda actividad los escolares deben llevar a cabo operaciones aritméticas para expresar las cantidades mediante una unidad común, de nuevo en el mismo contexto: la medida de la altura de unos niños.
- En ninguna de las tareas se lleva a cabo una acción de medir. Por tanto, se desaprovecha la oportunidad de que los alumnos elijan instrumentos adecuados, ideen pro-

© Ediciones Pirámide

cedimientos propios y contrasten resultados. Tampoco se da pie a que los escolares aborden las dificultades y, eventualmente, incurran en los errores asociados a los procesos reales de medición.

Por otra parte, la contribución de las tareas a la superación de errores se centra en las siguientes cuestiones:

- Algunos alumnos pueden incurrir en errores al interpretar las tareas o al realizar las operaciones aritméticas para solucionarlas. Se espera que se superen en el proceso de corrección.
- También es posible que, en la primera tarea, olviden «poner la unidad», al mostrar dejadez o no apreciar la importancia de expresar el resultado en centímetros. El docente llamará la atención sobre esa cuestión.

Las tareas matemáticas presentadas se centran en el cálculo con números que expresan las medidas, no utilizan materiales —como instrumentos de medida de longitud—, y la interacción entre cada escolar y el profesor, que ratifica la respuesta correcta, es bastante escasa. No obstante, toda la clase tiene la oportunidad de contrastar sus resultados con la respuesta correcta y de preguntar dudas, si las hubiera. La situación, a pesar de estar contextualizada, puede resultar poco significativa para el alumnado, puesto que no incita su curiosidad por averiguar medidas; tampoco supone un reto para ellos. Para niños de segundo ciclo de Primaria, el nivel de complejidad de estas tareas sería de Reproducción, ya que han de realizar operaciones aritméticas sencillas para resolverlas y, en el caso de la conversión de unidades, seguir procedimientos rutinarios explicados por el profesor.

6.2. Tarea matemática escolar de superficie (figura 3.3)

Podemos concretar cómo contribuye la tarea al logro de los objetivos mediante las siguientes apreciaciones.

- Los escolares deben ser capaces de trasladar adecuadamente las figuras a su cuadrícula.
- La percepción de la superficie como un atributo medible se atiende parcialmente con una situación ya dada, que está descontextualizada (no se aprecia su utilidad).
- Se emplean unidades de medida apropiadas para la superficie y se realizan procedimientos de iteración de unidades. Además, estas unidades son de tamaño distinto y con una proporción entre ellas. Esto ofrece la oportunidad para establecer relaciones entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medición, y para determinar relaciones de proporcionalidad (dependiendo del nivel de los escolares).

Por otra parte, la contribución de la tarea a la superación de errores y dificultades se centra en las siguientes cuestiones:

- Al tener que trasladar las figuras al papel cuadriculado, algunos alumnos pueden despistarse y variar la forma. El contraste de resultados con el compañero ayudará a subsanar posible fallos.
- Es previsible que tengan pocos problemas para iterar las dos unidades y contar el número de veces que están comprendidas en cada figura. Algunos alumnos pueden idear estrategias para hacer un recuento más rápido; por ejemplo, dividiendo las figuras en trozos rectangulares (que cuentan multiplicando base por altura) y su-

© Ediciones Pirámide

mando los resultados parciales, o multiplicando el número de cuadrados grandes por 4 para obtener el número de cuadrados pequeños.

- El hecho de que si la unidad es más pequeña la medida será más grande, será relativamente fácil de comprender. El docente puede poner otros ejemplos de esta idea y hacer preguntas al respecto en la puesta en común: «Si queremos enlosar la clase con baldosas y hay dos tamaños para elegir, ¿de cuál necesitaremos más cantidad de losas, de las grandes o de las pequeñas?»
- El hecho de que si la unidad es cuatro veces más grande entonces la medida es cuatro veces más pequeña, puede ser un poco más difícil de apreciar, pero puede ser asequible para varios alumnos (la estrategia de multiplicar para ganar rapidez en el recuento puede servir de puente para reconocer esta relación). Es posible que la extrapolación a otras proporciones y, sobre todo, la necesidad de cerciorarse de que son ciertas las conjeturas que hagan a este respecto, estén al alcance de unos pocos. El docente irá articulando el discurso y las preguntas, dependiendo de las respuestas del grupo.

Consideramos que es apropiado emplear cuadrículas para medir superficies. El agrupamiento en parejas para contrastar soluciones puede minimizar los errores debidos a la falta de atención al trasladar las figuras a la propia cuadrícula, así como la posibilidad de que los escolares discutan estrategias de recuento. La interacción en gran grupo a partir de las preguntas previstas puede generar interés, debido a la necesidad de hacer conexiones. No obstante, si las cuestiones de proporcionalidad resultan demasiado complejas para un buen número de alumnos, este interés se perderá.

La actividad, tal como se formula en el libro de texto, no resultará muy significativa para escolares de segundo ciclo, pues, aunque parte de conocimientos conocidos, requiriendo actuaciones fáciles, plantea un reto poco exigente, del que pueden controlar su respuesta pero desde una actuación sin finalidad práctica. Es posible que la discusión planteada añada significatividad para aquellos alumnos más predispuestos a la abstracción.

La actividad se sitúa al nivel de Reproducción. Las preguntas previstas para la puesta en común pueden situarla al nivel de Conexiones, puesto que necesitan establecer relaciones desconocidas para los escolares.

Hasta ahora hemos considerado las previsiones que el profesor puede hacer sobre las actuaciones de los escolares al abordar la tarea matemática. Estas previsiones proporcionan información relevante para que el profesor pueda también prever su actuación. Por ejemplo, si el profesor prevé que los escolares pueden incurrir en un error particular en un paso de la resolución de la tarea, entonces puede establecer su actuación con motivo de ese error, al diseñar un nuevo estímulo que pueda ayudar a los escolares a superarlo. En otras palabras, el análisis de las previsiones de las actuaciones de los escolares debe dar lugar a complementar el diseño de la tarea, al incluir las previsiones de la actuación del profesor. La previsión de las actuaciones del profesor con motivo de los errores en los que los escolares pueden incurrir es una de las cuestiones que tendremos en cuenta en la modificación de las tareas, que abordamos en el siguiente apartado.

Actividad 1:

a) Cada grupo seleccionará un ciclo de Educación Primaria y formulará una serie de expectativas y limitaciones de aprendizaje para

© Ediciones Pirámide

este ciclo del tema Polígonos. Para ello, puede hacer uso de los temas 6 y 12 del presente volumen, así como de directrices curriculares actuales.

b) A continuación, los miembros del grupo examinarán dos o más libros de texto de matemáticas correspondientes al ciclo escogido, compararán las tareas que esos libros proponen para el tema de polígonos y seleccionarán una de ellas que consideren representativa de lo que se encuentra usualmente en los libros de texto.

c) El grupo se dividirá en parejas, y cada pareja establecerá sus previsiones en términos de cómo podría desarrollarse cuando se implemente en un aula de Primaria. Para ello, comenzarán conjeturando sobre el conocimiento previo que necesitan los escolares, y describirán paso a paso las acciones que ellos pueden realizar y los conocimientos que pueden activar al resolverla. Al mismo tiempo, intentarán prever bloqueos que se puedan presentar y errores en los que puedan incurrir. Es conveniente establecer las acciones que permiten resolver la tarea, pero también es importante prever aquellas acciones y estrategias que pueden ser puestas en juego por aquellos alumnos con dificultades en el tema.

d) Las parejas compararán sus previsiones en el grupo de cuatro, el cual producirá una previsión conjunta.

ACTIVIDAD 2: Con base en la información que produzca en el punto anterior, el grupo analizará la tarea en términos de su contribución al logro de las expectativas de aprendizaje y a la superación de las limitaciones de aprendizaje, su significatividad y su complejidad.

7. MODIFICACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Los criterios expuestos para analizar una tarea matemática proporcionan información útil para que el profesor pueda establecer en qué medida las tareas de un libro de texto contribuyen a sus propósitos y para que pueda tomar decisiones al respecto. Por ejemplo, puede decidir que una tarea no es apropiada y que debe omitirla de su diseño de clase. En la mayoría de las ocasiones constatará que la tarea matemática está bien enfocada, pero que podría mejorarla —en términos de sus propósitos— si introduce algunas modificaciones. Estas modificaciones pueden ser de diferentes tipos y se refieren a los elementos de una tarea que describimos en el primer apartado de este capítulo. Puede entonces basarse en el análisis de la tarea para, por ejemplo, cambiar su formulación. También puede introducir modificaciones en el tipo de materiales y recursos que los escolares pueden usar para abordarla, en las formas de agrupamiento, en los esquemas de interacción y en los diferentes momentos en que puede plantearse, que caracterizan su temporalidad. Finalmente, también puede establecer con mayor detalle sus previsiones sobre sus actuaciones durante la clase.

Por lo que respecta a nuestros ejemplos, a la hora de introducir modificaciones en las tareas partiremos de la importancia de desarrollar el sentido de la medida en los escolares (véase capítulo 7), insistiendo en que los alumnos lleven a cabo la medición como proceso activo, en situaciones que les sean cercanas y donde haya que manejar instrumentos de medida y unidades, así como realizar estimaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos emplear una situación de medida de estaturas para proponer mediciones reales de la altura de los propios niños, promoviendo que se escojan instrumentos de medida y se realicen estimaciones. Además, se puede aprovechar esta misma situación personal de medidas del propio cuerpo para medir superficies, como la de la huella del pie. De esta forma, es posible profundizar en la percepción de la magnitud superficie en la rea-

© Ediciones Pirámide

lidad y en variantes distintas de superficies rectangulares. También se puede ahondar en las unidades de medida para esta magnitud y su significado, así como realizar estimaciones.

Por otra parte, para hacer mediciones reales los escolares necesitan colaborar unos con otros para emplear instrumentos de medida y discutir procedimientos. Esto da lugar a dinámicas de grupo más ricas. Mientras los niños realizan las mediciones, el docente aprovecha para observar los procedimientos que ellos realizan para detectar posibles errores, corregir sobre la marcha los que sean particulares y llamar la atención sobre aquellos que se presenten de forma más generalizada.

Con base en estas reflexiones, proponemos la formulación de una nueva tarea matemática escolar que aproveche algunas de las ideas anteriores. La tarea consiste en estimar y medir la altura y la superficie de la huella del pie de los niños de la clase. Se desarrolla en tres momentos diferentes.

1. Detección de ideas previas y aclaración de conceptos.
2. Estimación y medición de la altura y de la superficie del pie de cada niño de la clase.
3. Puesta en común de procedimientos y resultados.

7.1. Momento 1. Detección de ideas previas

Esta parte de la tarea se desarrollará en gran grupo. Se abordarán las siguientes preguntas:

1. En la clase de hoy vamos a medir longitudes y superficies. La longitud y la superficie, ¿son cosas distintas? ¿En qué se diferencian?
2. ¿Sobre qué objetos podemos medir longitudes en la clase? Por ejemplo, el alto de la pizarra, el ancho de la clase o la distancia entre pupitres. ¿Qué superficies? Por ejemplo, el suelo de la clase, la superficie de la mesa, de la pizarra, de la puerta, de un folio...
3. Y en nuestro cuerpo, ¿podemos medir longitudes y superficies?, ¿cuáles? Por ejemplo, nuestra altura, el largo del pelo, la longitud de los dedos, nuestra piel o la palma de la mano.
4. ¿Cómo podemos medir las longitudes? ¿Cómo podemos medir las superficies? Por ejemplo, la de la case, la de la pizarra o la de una goma de borrar. Si los escolares no sacan a relucir las unidades estándar, se puede preguntar si han oído hablar de metros cuadrados y de centímetros cuadrados, para qué se usan y qué son.

El docente deja tiempo para que todos los escolares piensen, y da la oportunidad a varios de ellos para hablar, no sólo a los más rápidos. Durante el proceso anota las respuestas en la pizarra, y al finalizar hace una síntesis de los conceptos tratados.

7.2. Momento 2. Estimamos y medimos la estatura de los niños de la clase y la superficie de la huella de sus pies

Para esta parte de la tarea, los alumnos trabajan en equipos de 4 niños y en gran grupo. Se proporcionan los siguientes materiales y recursos: reglas, cinta de costura, metro enrollable, metro de carpintero, hojas de papel cuadriculado, tramas de centímetros cuadrados, papel y lápiz.

© Ediciones Pirámide

Formulación de la tarea matemática escolar

Las siguientes son las instrucciones que se proporcionan en este momento de la tarea:

1. Estimar la altura de los niños del grupo. Anotar en la tabla.
2. Medir la altura de cada uno de los niños del grupo y la superficie de su pie. Para ello, se deben elegir los instrumentos de medida apropiados, justificar la elección y anotar los resultados en una tabla como la siguiente.

Nombre	Altura estimada	Altura medida	Superficie del pie

Interacción

La interacción en este momento de la tarea puede seguir las siguientes pautas.

1. Se inicia con una discusión en pequeño grupo sobre la estimación de alturas de los alumnos y el registro de resultados. El docente observa mientras los grupos trabajan para discutir en gran grupo las cuestiones interesantes que puedan surgir.
2. Después se realiza una discusión en gran grupo sobre los procesos de estimación de alturas que han empleado. Se abordarán cuestiones como las siguientes: ¿Cuál es el resultado de la estimación menor y mayor en cada grupo? ¿Son parecidos los resultados entre los grupos? ¿Hay resultados claramente imposibles? ¿Por qué? ¿Qué procedimientos o estrategias se han usado para estimar?
3. Cada grupo elige instrumentos de medida para la altura y para la superficie del pie. Con objeto de fomentar la participación de todos los integrantes de los grupos se hace una distribución de roles: anotador, medidores y portavoz. El grupo realiza las mediciones y anota los resultados (figura 3.7).

Figura 3.7.—Los niños rellenan la tabla, introduciendo los resultados de las mediciones.

4. Seguidamente, se hace una discusión en gran grupo sobre las siguientes cuestiones:
   - Adecuación de los instrumentos para medir la altura y la superficie del pie:

© Ediciones Pirámide

¿qué ventajas tiene el metro de carpintero sobre la cinta métrica o la vara de 1 m para medir la altura de los compañeros?
- Ventajas de elegir la cuadrícula pequeña o la más grande (de cm^2) para medir la superficie de la huella del pie: ¿con cuál podríamos tener más precisión?, ¿tiene alguna ventaja medir en cm^2?
- El problema de elegir unidades de medida de superficie diferentes a la hora de comparar resultados entre grupos: si elegimos unidades de medida diferentes, ¿podremos comparar los resultados de los distintos grupos?, ¿cómo?
- Relación entre el tamaño de la unidad de medida y el resultado de la medición: si medimos con cuadraditos pequeños, ¿el resultado de la medida será diferente de si medimos con cuadrados grandes?, ¿qué resultado será mayor?, ¿por qué?

5. El docente supervisa procedimientos y errores en los que los niños hayan podido incurrir. Les ayuda puntualmente. Si los errores son generalizados, los debate en gran grupo.

7.3. Momento 3. Puesta en común en gran grupo

En este momento de la tarea matemática se realizan las siguientes actividades.

1. Se comparan los resultados de los grupos en lo referente a estaturas estimadas y medidas: ¿qué grupos han estimado mejor?, ¿cómo lo han hecho?, ¿qué pasó en los grupos que no estimaron tan bien?, ¿por qué esas estimaciones no fueron tan buenas?
2. Se comparan los resultados de los grupos en lo referente a superficie del pie: ¿hay a priori resultados extraños?, ¿en qué unidades estamos midiendo?
3. El docente va anotando los resultados en una hoja Excel en la pizarra digital.

7.4. Análisis de la tarea

Esta tarea se relaciona con todos los objetivos expuestos sobre las magnitudes longitud y superficie, así como con todas las dificultades. La tarea contribuye al logro de los objetivos, por cuanto los escolares:

- Tienen la oportunidad de profundizar en los conceptos de longitud y superficie, percibiéndolos como atributos medibles en el entorno.
- Eligen instrumentos y llevan a cabo actuaciones para medir longitudes y superficies.
- En el caso de la superficie, pueden dotar de significado a la unidad de medida estándar (el cm^2).
- Realizan procesos de estimación de longitudes y superficies (a la hora de estimar la altura, se espera que muchos alumnos sepan aproximadamente cuánto miden y otros compañeros estimen con ese referente, o bien utilizando la vara de un metro que estará expuesta en clase).
- Tienen la oportunidad de explicitar y argumentar los procedimientos puestos en juego.
- Representan los resultados de las estimaciones y mediciones de forma organizada, por medio de una tabla.
- Trabajan en un contexto personal (las medidas sobre sus propios cuerpos).

© Ediciones Pirámide

Por otra parte, la contribución de la tarea a la superación de dificultades y errores se centra en las siguientes cuestiones:

- Es posible que varios alumnos no tengan clara la diferencia entre las magnitudes longitud y superficie, y que los ejemplos de superficies se limiten a objetos de forma rectangular. En la discusión inicial se espera clarificar estas nociones, así como ejemplificar la magnitud superficie en otras variantes (como, por ejemplo, nuestra piel, nuestras huellas, la piel de las frutas o la superficie de la bola del mundo).
- En cuanto a los procedimientos de medida de la altura, hay niños que, al utilizar la cinta métrica para medir, la adaptan al contorno del cuerpo. Otros que se agachan para facilitar al compañero la labor de medición. Al medir la altura pegándose a la pared, la postura corporal puede no ser correcta. Al utilizar un libro o similar para marcar la altura puede no ponerse de forma perpendicular a la pared, etc. El docente atenderá cuidadosamente a los procedimientos empleados por los alumnos y sacará a relucir la situación, invitando a los compañeros a detectar posibles errores y a dar soluciones. En caso de que a ningún alumno se le ocurran, el docente las expondrá.
- Al dar a los alumnos la posibilidad de elegir instrumento y procedimiento para medir la superficie de la huella del pie, un error común es el de intentar medirla a través del perímetro, porque creen que las figuras que tienen el mismo perímetro tienen la misma área. Por esa razón, los alumnos toman con la cinta métrica la medida del perímetro del pie, hacen un rectángulo o un cuadrado con este perímetro y averiguan el área de este último. Si este error se presenta, el docente aprovechará para profundizar en la distinción entre área y perímetro, proponiendo actividades como la siguiente: «En un papel cuadriculado, dibujar figuras que tengan de perímetro 20 lados de cuadrado y distintas formas. ¿Tienen todas la misma área? ¿Qué conclusión podemos sacar respecto al procedimiento para medir el área del pie a través de su perímetro?».
- Es posible que surjan dificultades relativas a las unidades de medida de superficies. La relación inversa entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medición es difícil de captar para un buen número de alumnos. La discusión en clase, incluyendo ejemplos de situaciones concretas (como el de las baldosas para enlosar la clase dado anteriormente), ayudará a clarificar esta cuestión para un mayor número de alumnos; no obstante, esta es una cuestión sobre la que se puede incidir con otras actividades.
- La importancia de explicitar la unidad de medida puede pasar desapercibida. El docente preguntará a los alumnos por el significado de la cifra que dan como resultado de la medición y procurará que expliciten el significado de cm y cm^2. Para ello, todos los alumnos tendrán que escribir la respuesta a esta última cuestión y pasarla a un compañero del grupo para que la revise. Una vez revisadas las respuestas del grupo, cada grupo dirá en voz alta el significado de las unidades de medida.
- En el recuento de unidades de medida de superficie, los trozos no enteros de cuadrados pueden dejarse sin contar o contarse como cuadrados enteros. Puede haber dificultades para comprender la necesidad de estimar qué trozos podrían

© Ediciones Pirámide

componer una unidad cuadrada y contarlos como una unidad. Puede haber algún niño que, al contar, coloque dígitos en lugar de números en los cuadrados. Estas dificultades se ejemplifican en las figuras 3.8, 3.9 y 3.10. En la figura 3.8 se aprecia que los trozos de unidad no enteros no se tuvieron en cuenta en el recuento y el trazado del contorno del pie se hizo de forma descuidada. Por otro lado, algunos niños pueden colocar en los cuadrados dígitos en lugar de números (figura 3.9). Finalmente, algunos niños pueden contar los trozos de unidad como unidades enteras (figura 3.10).

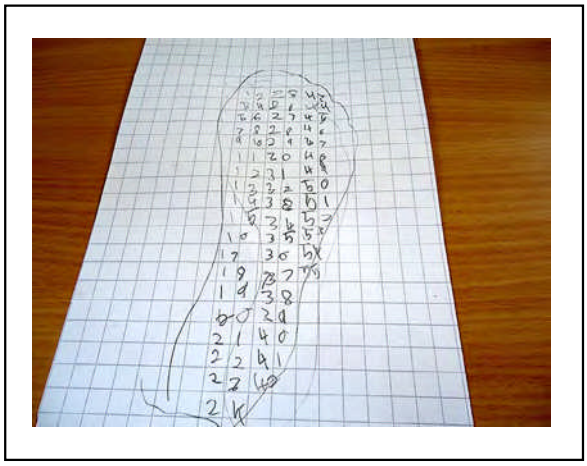


Figura 3.9.—Dígitos en lugar de números.

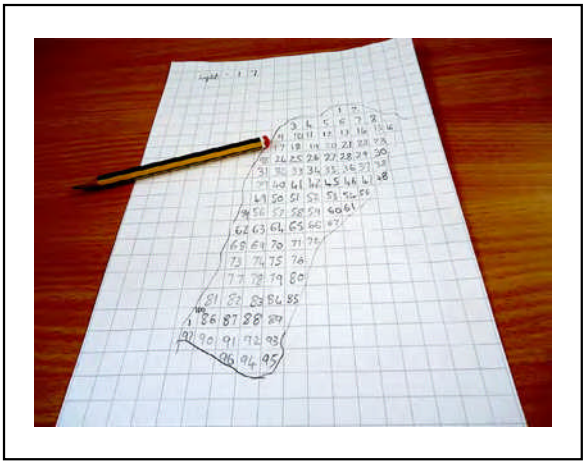


Figura 3.8.—Trozos no enteros que no se contaron y contorno descuidado.

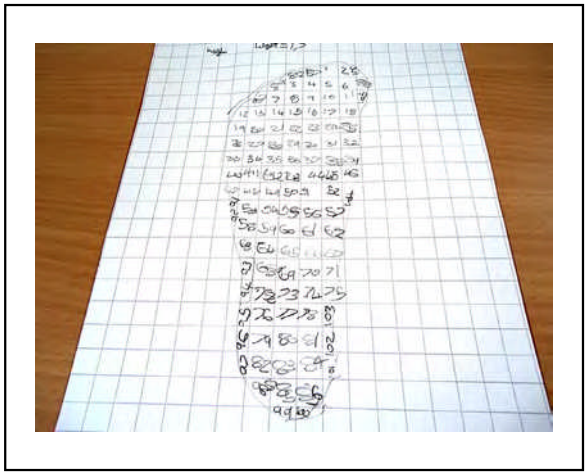


Figura 3.10.—Trozos de unidad como unidades enteras.

La tarea es asequible para los alumnos. Ellos pueden iniciar el trabajo con sus conocimientos previos. El hecho de medir sus propias estaturas y la superficie de sus pies puede ser significativo, por un lado, por tratarse de un proceso activo que implica moverse y, por otro, por conocer datos sobre sí mismos y tener oportunidad de compararlos con los de los compañeros. Los alumnos pueden ver con claridad qué deben lograr y qué resultados deben presentar. Además, hay un reto en relación con la estimación: comprobar la precisión de las propias estimaciones suele resultar estimulante.

El docente lleva al aula distintos instrumentos de medida de longitud y da oportunidad de

© Ediciones Pirámide

conocerlos y analizarlos sobre la base de la situación en la que se quieren emplear. El papel con cuadrícula de centímetros cuadrados permite visualizar una unidad estándar para la medida de la superficie y dar significado a esta unidad cuando se expresa una medida. Las hojas cuadriculadas de los cuadernos posibilitan trabajar la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el resultado de la medida, por comparación con la plantilla de centímetros cuadrados. Esto puede dar lugar a discutir sobre las ventajas de esta cuadrícula sobre la cuadrícula habitual, en cuanto a precisión, así como por la importancia de expresar en unidades comunes para poder comparar resultados.

La alternancia de momentos de comunicación en gran grupo y en pequeño grupo permite que los escolares expresen sus ideas, contrasten puntos de vista y unifiquen conocimientos compartidos en la clase. El trabajo de estimación y medición llevado a cabo en grupos de cuatro permite, por una parte, la colaboración en los procesos de medida y la discusión de estimaciones, así como compartir procedimientos y resultados, que los alumnos pueden comparar y contrastar. Se espera que la asignación de roles contribuya a la organización y a que los alumnos se sientan protagonistas, al asumir una responsabilidad.

Esta actividad se sitúa al nivel de Conexión. No se trata de aplicar procedimientos rutinarios ya aprendidos, sino que los escolares deben idear sus propios procedimientos para medir, poner en juego sus ideas a la hora de dar respuesta a cuestiones (como examinar la pertinencia de unos instrumentos sobre otros) y conectar cuestiones (como buscar la relación entre unidades lineales —el cm— y unidades cuadradas —el cm^2—, o relacionar el tamaño de la unidad y el resultado de la medida). El problema está situado en un contexto familiar.

Actividad 1:

a) Con base en el análisis realizado en la actividad 2 del apartado 6, cada grupo modificará la tarea elegida, considerando introducir cambios, al menos, en los materiales y recursos (atendiendo a su eficiencia y su eficacia), y el agrupamiento y la interacción (al prever las ayudas y preguntas que aborden las dificultades que los estudiantes manifiesten o que saquen a la luz cuestiones que el maestro puede considerar relevantes).

b) A continuación, el grupo describirá la tarea modificada y destacará las diferencias entre la nueva versión de la tarea y la tarea que se analizó en la actividad 2 del apartado 6, con respecto a su meta, formulación, uso de materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.

c) El grupo analizará, siguiendo las indicaciones de las actividad 1 del apartado 6, la nueva versión de la tarea, y señalará las mejoras que supone con respecto a la tarea inicial del libro de texto, sobre la base de su contribución a la consecución de expectativas de aprendizaje, a la superación de dificultades, a su significatividad y a su complejidad.

Actividad 2: En esta última actividad, cada grupo compartirá su trabajo, recibirá los comentarios y críticas de otro grupo y se realizará una puesta en común, siguiendo los pasos que se describen a continuación.

a) Cada grupo compartirá en la plataforma virtual del curso la descripción de la versión final de su tarea.

b) El formador establecerá parejas de grupos. Cada grupo de una pareja deberá analizar el trabajo del otro grupo.

c) Cada grupo expondrá a la clase la descripción de la nueva versión de la tarea y justificará sus bondades, con base en los resultados del análisis que ha hecho.

d) Después de la presentación de un grupo, el grupo que forma pareja con él hará comentarios y aportaciones al trabajo presentado y señalará posibles inconvenientes.

© Ediciones Pirámide

e) Finalmente, el formador motivará una discusión y puesta en común del trabajo realizado por los grupos, en la que buscará destacar la relevancia de describir, analizar y modificar tareas para la planificación de clase.

8. AMPLIACIÓN DE LA TAREA MATEMÁTICA ESCOLAR

Aun cuando una tarea aborde las expectativas y las limitaciones de aprendizaje previstas, es posible que sea provechoso pensar en ampliarla. Puede haber diversos propósitos para ello. Por ejemplo, es posible que la aparición de errores en los que los escolares incurren sistemáticamente requiera de una actividad adicional que permita abordarlos y que les dé la oportunidad a los escolares para superarlos. Por otro lado, se puede pensar en aumentar la complejidad o la significatividad de la tarea. Ejemplificaremos a continuación estas dos posibilidades, que pueden implementarse una después de la otra. También se puede implementar una sola de ellas.

8.1. Momento 4a. La huella del docente

Los errores generalizados en los que suelen incurrir los alumnos al hacer el recuento de unidades cuadradas en las huellas de sus pies muestran la conveniencia de agregar un nuevo momento a la tarea, que describimos a continuación.

1. Damos a cada grupo la huella del docente. En primer lugar, los grupos han de estimar su superficie en centímetros cuadrados. Se anotará en la pizarra el resultado de la estimación de cada grupo. Luego los grupos la miden, utilizando la trama, y se comparan resultados.
2. Cada grupo realiza la actividad, mientras el docente supervisa procedimientos de estimación y de recuento de unidades. Como es habitual, corregirá sobre la marcha aquellas dificultades y errores que sean particulares y llamará la atención sobre los que sean más generales.
3. Se hace una puesta en común en gran grupo, en la que se discuten los resultados y procedimientos empleados por los grupos. Se volverá a insistir en la superación de obstáculos que hayan aparecido. Aquí surgirá una buena oportunidad para reflexionar sobre el hecho de que las medidas reales siempre son aproximadas (las medidas exactas corresponden únicamente a operaciones aritméticas con datos ya proporcionados). Es muy posible que las distintas maneras de recomponer trozos para formar unidades completas de lugar a variaciones en los resultados. Se discute entonces cuál es el margen de error apropiado para mediciones de objetos reales.

8.2. Momento 4b. Relación entre tamaños

Otra posible forma de ampliación consiste en buscar conexiones de la tarea con otras materias o con otros tópicos matemáticos. Por ejemplo, en la tarea anterior se han recogido datos de la altura y la superficie del pie de todos los niños de la clase. Cuando se tiene un buen número de datos, se abre la posibilidad de representarlos de forma organizada y establecer relaciones y patrones entre ellos. De esta forma, la actividad puede ampliarse para conectar co-

© Ediciones Pirámide

nocimientos de medida y de análisis de datos, al tiempo que podría aprovecharse para plantear un interrogante que estimule a los escolares a hacer conjeturas, establecer regularidades y buscar generalizaciones, situándose así en el nivel de Reflexión en cuanto complejidad de la tarea.

En la ampliación de la tarea, se plantea en clase el interrogante:

«¿Hay alguna relación entre la altura de las personas y la superficie de su pie?»

Contemplamos cuatro momentos a la hora de llevar a cabo esta ampliación de la tarea: detección de ideas previas, realización de la actividad propiamente dicha (con intervalos de discusión), puesta en común, y un final divertido (y útil) para la actividad.

Detección de ideas previas

En este momento de la tarea matemática los alumnos trabajan en gran grupo. Se espera que los escolares formulen algunas conjeturas en relación con el interrogante propuesto. Puede que llamen la atención sobre las excepciones. El docente puede preguntar si los casos en los que la supuesta relación no se cumple son excepcionales o no.

Elaboración de gráficos en pequeños grupos e interpretación de resultados

Los alumnos trabajan en equipos de 4 niños y en gran grupo. Disponen de diagramas de ejes para la altura y la superficie (uno por grupo). Se realizan las siguientes actividades.

1. Cada grupo tiene que representar sus resultados en el diagrama de ejes que se proporciona. Para ello, tienen que ponerse de acuerdo sobre la elección de la escala.
2. El docente supervisa el proceso y, como es habitual, aprecia errores y detecta dificultades puntuales y colectivas, ayudando a los escolares y buscando formas de solventarlas cuando lo estime oportuno.
3. Se comparan los gráficos de todos los grupos.
4. Cada grupo hace una interpretación de los resultados para responder a la pregunta inicial. Se ponen en común las interpretaciones.
5. Se plantea la cuestión de qué sucederá cuando los datos de toda la clase se agrupen. Los escolares hacen conjeturas.

Los gráficos pueden hacerse en papel y lápiz o, si los alumnos disponen de portátiles, en hojas electrónicas de Excel.

Elaboración de un gráfico de toda la clase e interpretación de resultados

Este momento de la tarea se realiza en gran grupo. Se utilizan la pizarra electrónica y el programa Excel. Se introducen los resultados de cada alumno en la hoja Excel de la clase, que aparece proyectada en la pizarra electrónica. Una vez generada la tabla con los datos de todos los escolares, planteamos el interrogante: ¿Cómo podemos organizar estos datos para responder a la pregunta inicial, sobre si hay alguna relación entre la altura de las personas y la superficie de su huella del pie? Una posibilidad es la de ordenar una de las variables de menor a mayor y observar si la otra se comporta de manera similar. ¿Hay una correspondencia estricta? ¿No existe ningún tipo de patrón en la segunda variable? ¿Se observa una tendencia, pero con excepciones? Para contestar a es-

© Ediciones Pirámide

tas preguntas, puede ser útil aprovechar la posibilidad que ofrece el programa de generar un gráfico. ¿Qué podemos interpretar a partir de él? En caso de que exista una cierta tendencia en la relación entre la altura y la superficie de la huella del pie, pero que se presenten excepciones, podemos verificar si realmente se trata de excepciones o si obedecen a errores de medición. También se puede animar a los escolares a generar más preguntas sobre los datos. Por ejemplo, si existen diferencias de género o cómo se corresponde la medida de la superficie del pie con el número de calzado.

Representación de un «gráfico humano»

Se representa en el patio del colegio un gráfico en 3D con los resultados de la medida de la altura y la superficie de la huella del pie de toda la clase. Para ello, el docente habrá de estudiar los datos y elegir una escala apropiada para que quepan los niños en las parcelas. Luego señalará los ejes y sus respectivas escalas en el suelo del patio. Los escolares tendrán que colocarse físicamente en el lugar que les corresponda dentro de la gráfica. Además de lo estimulante que puede resultar, este momento de la tarea sirve para afianzar el significado de la representación gráfica, puesto que cada escolar ha de interpretarla adecuadamente para buscar su lugar en ella.

9. RESUMEN

En este capítulo hemos abordado la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la selección, descripción, análisis y modificación de tareas matemáticas escolares. Puesto que los escolares aprenden llevando a cabo las actividades que realizan al abordar las tareas que les propone el profesor, su labor va más allá de ejecutar las tareas del libro de texto. El profesor debe asumir la responsabilidad de proponer tareas matemáticas que proporcionen a los escolares la oportunidad de lograr los objetivos de aprendizaje y superar sus dificultades. Para ello, debe tener los conocimientos matemáticos y didácticos y las habilidades necesarias para seleccionar, analizar y modificar las tareas que mejor se adapten a estos propósitos y para gestionarlas apropiadamente en clase.

Hemos propuesto algunas ideas clave y procedimientos con los que el profesor puede lograr estos propósitos. Para ello, hemos puesto de manifiesto que, mejor que diseñar tareas matemáticas desde cero, es recomendable aprovechar las tareas matemáticas escolares que existen libremente disponibles. Entre ellas, el profesor puede seleccionar tareas candidatas, y caracterizarlas y complementarlas en términos de su meta, su formulación, los materiales y recursos que pueden implicar, así como los tipos de agrupamiento de los escolares y las formas de interacción que se pueden generar. Para establecer si una tarea matemática es apropiada para sus propósitos, tiene que analizarla, previniendo cómo se desarrollará el aprendizaje cuando los escolares la aborden y estableciendo la significatividad y la complejidad de la tarea. La información que surja de ese análisis le permitirá identificar aquellos aspectos de la tarea que puede modificar para mejorarla.

El ejemplo que hemos presentado en este capítulo describe en detalle, para un caso concreto, estas ideas y procedimientos. Los profesores con experiencia llevan a cabo estos procedimientos de una manera más rápida. El estudiante para profesor ha de tener en cuenta estas ideas clave y realizar los ajustes que considere convenientes para contribuir al aprendizaje de los escolares. A medida que vaya ganando experiencia, abordará y resolverá estas cuestiones de manera sistemática y natural.

© Ediciones Pirámide

Matemáticas y resolución de problemas

4

ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ
JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

La Torre de Hanoi. En 1883 el matemático francés E. Lucas planteó el problema de la torre de Hanoi. Se trata de un juego que consta de ocho discos con diámetros distintos y de un tablero con tres pivotes para insertarlos. El objetivo del juego consiste en trasladar los discos apilados en el pivote de la izquierda, según orden de tamaño decreciente, al pivote de la derecha con el mismo orden. Las reglas establecen que no se puede mover más de un disco a la vez, es decir, las piezas se trasladan de una en una desde un pivote a otro, y no se puede colocar una pieza mayor sobre una menor. El pivote intermedio se utiliza como posición auxiliar.

ACTIVIDAD Ensaya una estrategia para resolver el problema con tres discos. La figura 4.1 expresa la situación inicial y la final cuando el problema está resuelto. Anota en tu cuaderno las posiciones sucesivas de las fichas para resolver el problema.

© Ediciones Pirámide

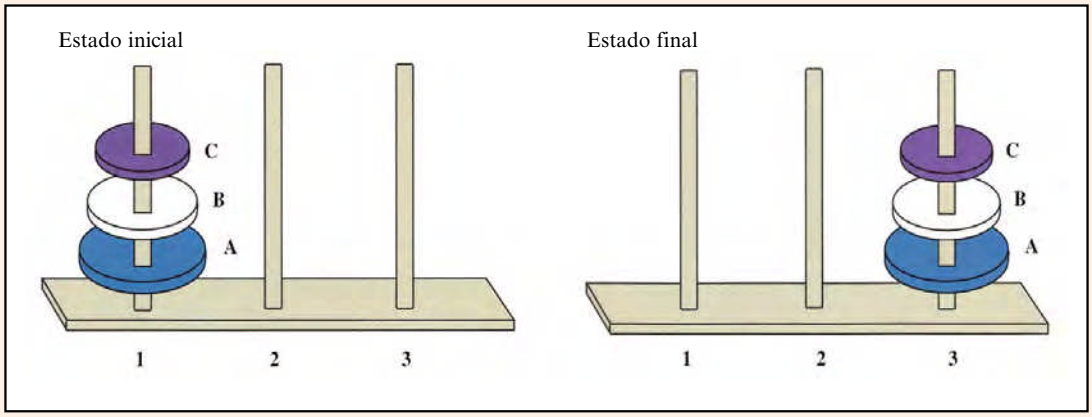


Figura 4.1.—Estado inicial y final de las Torres de Hanoi.

La resolución de problemas en el nivel escolar abarca problemas rutinarios, como los de aplicación de las operaciones aritméticas, y problemas no rutinarios, como el anterior.

Este capítulo se centra en estudiar el valor que tiene en educación la resolución de problemas, con especial consideración hacia los problemas matemáticos en el ámbito escolar. En educación matemática, los problemas y su resolución se consideran un tipo importante y singular de tareas matemáticas escolares. La capacidad para resolver problemas se presenta como una componente clave de la competencia matemática escolar durante el período obligatorio y, por tanto, como una meta relevante para la educación de los estudiantes.

© Ediciones Pirámide

1. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PROPUESTAS CURRICULARES

La importancia de la resolución de problemas en el sistema educativo es una idea aceptada y generalizada. La enseñanza en las ramas de ciencias tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimientos organizados en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio.

Además de formar parte de la actividad científica, la resolución de problemas también constituye un tipo de tarea educativa que debe ocupar una posición destacada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los escolares. Igualmente, la resolución de problemas puede ser un contenido escolar que contribuya a la formación intelectual y científica de los estudiantes.

Desarrollar la competencia de los estudiantes en resolución de problemas es una de las finalidades que contemplan las propuestas curriculares, desde la Educación Primaria hasta la universitaria. La forma en que esta competencia pueda ser desarrollada y adquirida por los estudiantes, así como los factores que pueden influir en el proceso de su enseñanza y aprendizaje, ha sido y sigue siendo objeto de reflexión. Este capítulo pone de manifiesto ideas que tienen que ver con la resolución de problemas en el ámbito escolar y que son parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

El currículo de matemáticas para la educación obligatoria contempla la resolución de problemas como contenido transversal, que debe integrarse en los distintos temas. En ocasiones los profesores aíslan la resolución de problemas y la tratan como un tema más del currículo de matemáticas; en otras, se trabaja sobre resolución de problemas de manera integrada a lo largo de los distintos temas. El capítulo muestra aspectos de la resolución de problemas que pueden interpretarse como incluyentes y complementarios. El contexto de enseñanza es el que tiene que sugerir la utilidad y la pertinencia de cada uno de ellos.

La forma de trabajar las matemáticas en la escuela Primaria ha ido evolucionando en las últimas décadas. La imagen de los escolares sentados en filas de bancas, trabajando en silencio sobre su cuaderno, realizando cálculos, aprendiendo de memoria reglas y fórmulas y aplicándolas de forma rutinaria es cada día menos apreciada. La gestión de la clase evoluciona hacia el trabajo en pequeños grupos, donde los escolares hablan y utilizan materiales para modelizar un problema, anotan lo que han descubierto y participan en una conversación colec-

© Ediciones Pirámide

tiva sobre lo que han aprendido. A los escolares se les anima a compartir sus ideas y los procesos que utilizan para resolver problemas, a escuchar a los compañeros e intervenir en el debate en clase. Todo ello porque se pretende que hagan matemáticas participando activamente en una amplia variedad de acciones, tales como explorar, observar, conjeturar, modelizar, generalizar, buscar patrones o verificar.

Un documento curricular que recoge de forma clara el enfoque de aprender matemáticas de forma activa es el libro *Principles and Standars for School Mathematics* (NCTM, 2000). Dicho documento identifica cinco procesos transversales a través de los cuales se puede organizar el currículo de matemáticas: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representaciones. Esta propuesta establece actividades que conllevan esos procesos fundamentales, con especial atención hacia la resolución de problemas.

ACTIVIDAD 1: Localiza el documento curricular de la Educación Primaria en vigor. Haz un resumen de las directrices o recomendaciones que encuentres sobre resolución de problemas.

2. QUÉ ES UN PROBLEMA

Los profesores que enseñan matemáticas necesitan tener una idea clara de qué es un problema y en qué consiste su resolución para promover esta competencia en los escolares.

2.1. El problema como reto: una perspectiva cognitiva

Un problema se puede describir como un desafío, como una situación retadora o conflictiva que propone el logro de una meta y hace necesario descubrir una vía para alcanzarla. Un problema se inicia con un interrogante, desde una situación en la que una persona quiere alcanzar un objetivo y no sabe cómo hacerlo, bien porque el camino a la meta se desconoce o bien porque está bloqueado. Es importante resaltar que, para que exista un problema, el sujeto que lo afronta tiene que asumirlo como tal. Cuando una persona sabe cómo dar respuesta al interrogante, o cuando la respuesta se obtiene de manera inmediata, entonces la situación no es un problema para ese sujeto.

Con más precisión, se puede expresar del siguiente modo:

«Un problema es una tarea para la cual el individuo o grupo que se enfrenta con ella quiere o necesita encontrar una solución, y no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución, y el individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución».

Un problema es un reto cognitivo para un sujeto a quien se le plantean, de manera creativa e intelectualmente estimulante, nuevas oportunidades de aprendizaje. En el aula de matemáticas los problemas adoptan el formato y las características de una tarea matemática escolar. Por ello tienen importancia en el aprendizaje y la enseñanza.

Para adquirir cierta competencia en resolución de problemas hay que entrenarse en resolver problemas. Para ello, los profesores y los libros de texto proponen muchas actividades supuestamente de resolución de problemas. Sin embargo, no siempre estas actividades se pueden considerar como problemas, ya que no plantean retos sino sólo meras aplicaciones rutinarias de conocimiento adquirido previamente.

Es discutible considerar como tareas de resolución de problemas las propuestas en un li-

© Ediciones Pirámide

bro de texto, que ofrece ejercicios de cálculo, por ejemplo sumas de tres números como la siguiente:

$$\begin{array}{r} 370 \\ 875 \\ \underline{+\ 692} \end{array}$$

y a continuación pide que se apliquen y resuelvan cuestiones como:

La madre de Juan fue al supermercado y gastó 370 euros en una televisión, 875 en un sofá y 692 en un ordenador. ¿Cuánto ha gastado en total?

Consideramos que esta tarea proporciona poca experiencia sobre resolución de problemas, ya que lo que se está favoreciendo es la repetición de una regla, carente de la parte de reto y creatividad que debe estar presente en la resolución de problemas.

ACTIVIDAD 1:

a) Examina aspectos de la resolución de problemas que aparecen en la actividad anterior, y enuncia otros que la distancian de una auténtica actividad de resolución de problemas para el nivel de cuarto de Primaria.

b) Completa la actividad siguiente, para convertirla en una tarea de resolución de problemas:

Encuentra tres números de cuatro cifras, en los que no se repitan las cifras, cuya suma sea 9.336.

c) Enuncia un problema matemático escolar e identifica cuál es el reto que plantea.

2.2. El problema como tarea matemática escolar

Cuando un profesor, durante una clase, propone un problema a los escolares para que lo resuelvan, estos escolares tienen distintas ideas acerca de su enunciado: suponen que tiene respuesta única, que se puede obtener su solución por los procedimientos que se han estudiado en clase, o que el profesor conoce la solución al problema y que pueden ser capaces de conseguir pistas de la solución haciendo ciertas preguntas al profesor o utilizando sus gestos y ademanes para interpretar si van por buen camino hacia la solución. Estas consideraciones descuidan la atención sobre la cuestión realmente propuesta por el profesor. Son distractores, pues ponen su atención en aspectos secundarios y no consideran el reto planteado.

Una experiencia conocida, que muestra esa falta de atención en la consideración del problema, es la denominada «Problema de la edad del capitán», que dice:

«Un barco transporta 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?».

Dicho enunciado se propuso a 97 escolares, de entre siete y nueve años, de los cuales 76 calcularon la edad del capitán sumando los datos del enunciado: 26 + 10. Algunos profesores y expertos opinan que esta falta de atención a la pregunta, que lleva a la ausencia de sentido en la respuesta, no se daría si los problemas se trabajaran como tareas de modelización.

Las ideas preconcebidas que tiene un escolar de las matemáticas son fruto de sus experiencias previas en el aprendizaje. Esas ideas están relacionadas con ideas ingenuas sobre la resolución de problemas, y con cómo conciben las matemáticas. Muchos escolares consideran las matemáticas como una disciplina rígida, con escaso margen de creatividad, no susceptible de cambios, gobernada por reglas que no tienen que ver con su propia experiencia, y donde la memorización y la rutina importan más que la comprensión.

© Ediciones Pirámide

Creencias extendidas acerca de la resolución de problemas en matemáticas son: que cada problema de matemáticas tiene una sola respuesta correcta, que las matemáticas se trabajan de forma individual, que los problemas de matemáticas se resuelven rápidamente o bien no se pueden resolver, y que los problemas matemáticos y sus soluciones no tienen sentido real.

Igualmente, hay profesores que piensan que los problemas tienen un único camino de resolución. Estas creencias de los profesores sobre resolución de problemas se asimilan de forma implícita por los escolares. Una manera de superar esta visión limitada consiste en proponer problemas abiertos en los que hay que tomar decisiones que cambian la solución final, o problemas que puedan tener más de una solución.

Este capítulo se dedica a la resolución de problemas de modo específico, como tema singular diferenciado de otros temas matemáticos. No obstante, esta opción subraya que las habilidades de resolución de problemas se deben desarrollar al mismo tiempo y con igual profundidad que los bloques de contenido. Además, conviene elaborar propuestas de tareas que contemplen la resolución de problemas para el trabajo de los escolares en matemáticas.

2.3. Ejercicios, problemas y enigmas

Considerar una determinada tarea matemática como problema depende, principalmente, del reto que proponga y de la demanda cognitiva que la tarea plantee a los escolares a los que va dirigida. En educación matemática, calificar como problema una determinada tarea depende de varios factores, tales como el tipo propuesto, el nivel escolar en que se propone, las expectativas del profesor sobre el aprendizaje que se puede lograr, la dificultad de la tarea y el reto cognitivo planteado al alumno. En determinados momentos del proceso de instrucción los profesores proponen ejercicios y tareas de reproducción, mientras que en otros plantean tareas que suponen un reto para la mente, es decir, de conexión y reflexión. Así pues, según el desafío que supongan para el escolar, las tareas que se proponen a los estudiantes en educación matemática oscilan entre problemas y ejercicios.

- *Ejercicio.* Llamamos ejercicio a una tarea de reproducción para cuya respuesta una persona dispone de una rutina o un método para obtener su solución. Puesto que el resolutor conoce un camino a seguir para alcanzar la solución, los ejercicios se resuelven de forma automática, de forma rutinaria y sólo contribuyen a desarrollar destrezas.
- *Problema.* Problema es una tarea matemática escolar cuyo resolutor no conoce un procedimiento estándar que determine su solución y, además, quiere encontrar dicha solución.
- *Enigma.* Se llama enigma a una tarea que resulta incomprensible, debido a que se carece de información para poderla resolver.

Estas descripciones están en función del reto que se plantea a una persona. Una tarea que para una persona es un problema, para otra puede ser bien un ejercicio o bien un enigma.

ACTIVIDAD 2: Examina las siguientes tareas matemáticas escolares y justifica en cada caso si se trata de un ejercicio, un problema o un enigma para un alumno de Primaria. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Tarea 1. Realiza el producto 34.578.923 × × 56.789.

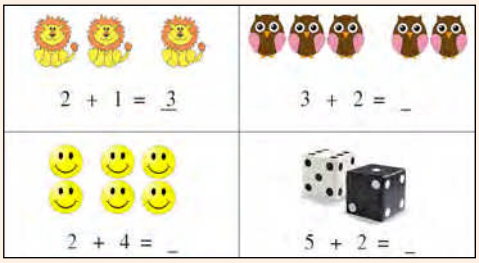
Tarea 2. Un barco lleva 24 pasajeros. 15 son hombres y 9 mujeres. ¿Cuál es la edad del capitán?

© Ediciones Pirámide

Tarea 3. Tres futbolistas, llamados Tomás, Darío y Quique, están entrenando en un campo de fútbol. Tomás, el mejor futbolista de los tres, siempre dice la verdad. Darío algunas veces dice la verdad, mientras que Quique, el peor futbolista, nunca la dice. ¿Puedes descubrir quién es quién? Explica cómo lo haces. (Sugerencia: Primero averigua quién es Tomás). Justifica brevemente la respuesta.

ACTIVIDAD 3: Analiza las siguientes actividades extraídas de libros de primer curso de Primaria e identifica si se trata de problemas o ejercicios. Razona tu respuesta.

a)



b) *Suma estas cantidades y coloca la respuesta correcta en la casilla correspondiente:*

1	1 + 1 =	● + ●	2
2	1 + 2 =	● + ● ●	
3	1 + 3 =	● + ● ● ●	
4	1 + 4 =	● + ● ● ● ●	
5	1 + 5 =	● + ● ● ● ● ●	
6	1 + 6 =	■ + ■ ■ ■ ■ ■ ■	
7	1 + 7 =	★ + ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★	
8	1 + 8 =	● + ● ● ● ● ● ● ● ●	
9	1 + 9 =	● + ● ● ● ● ● ● ● ● ●	

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS E INSTRUCCIÓN

Comúnmente, se identifican tres vías diferentes de incorporar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas:

1. Enseñar ***para*** la resolución de problemas.
2. Enseñar ***sobre*** la resolución de problemas.
3. Enseñar ***a través*** de la resolución de problemas.

Los dos primeros enfoques consideran la resolución de problemas como un objetivo de aprendizaje, y el tercero como vehículo para enseñar o desarrollar otros contenidos.

Estos tres acercamientos a la resolución de problemas pueden utilizarse de manera aislada, pero en la práctica se solapan y se utilizan en secuencias que incorporan más de una de estas aproximaciones.

3.1. Enseñar para la resolución de problemas

Los partidarios de este enfoque sostienen que la finalidad del aprendizaje matemático escolar consiste en utilizar el conocimiento adquirido para resolver problemas. En la enseñanza para resolver problemas, la estrategia de instrucción del profesor se centra en organizar secuencias de tareas, de manera que el conocimiento matemático recibido pueda ser aplicado en la resolución de problemas de distinto nivel de complejidad, rutinarios y no rutinarios. El objetivo de este enfoque consiste en que el estudiante adquiera la habilidad de utilizar el conocimiento matemático aprendido para atender a los retos propuestos y resolver problemas.

© Ediciones Pirámide

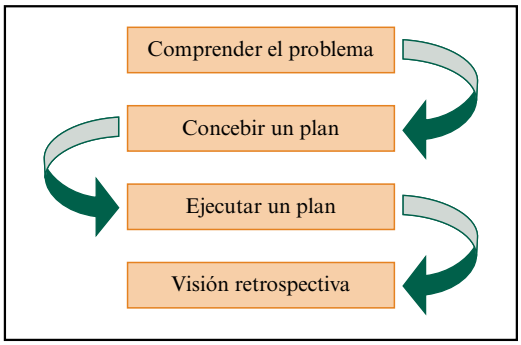
Por consiguiente, al escolar se le proporcionan gran diversidad de tareas matemáticas, vinculadas con los contenidos que se estudian, que incluyen diferentes demandas cognitivas y que requieren de su aplicación. En este modelo de enseñanza se intenta que el escolar adquiera la habilidad para resolver problemas y transferir el aprendizaje de un contexto a otro.

ACTIVIDAD 1: Localiza en un libro de texto para tercer ciclo de Primaria tareas matemáticas de distinto nivel de complejidad. Determina para cada una de ellas si se trata de un ejercicio o de un problema.

3.2. Enseñar sobre la resolución de problemas

El profesor que enseña *sobre* la resolución de problemas instruye sobre un modelo, como el de Polya, u otra variante. Este proceso de resolución consta de cuatro fases:

- Comprender el problema.
- Concebir un plan.
- Ejecutar el plan diseñado.
- Evaluar lo realizado (mirar hacia atrás, reflexionar sobre el problema y la solución).



Para cada una de estas fases hay una serie de preguntas que el profesor puede realizar para ayudar a los alumnos en el proceso de resolución de problemas.

Comprender el problema

Este principio parece demasiado obvio, e incluso podemos pensar que es innecesario. Sin embargo, muchos escolares fracasan en el proceso de resolución, bien porque no comprenden el problema o bien alguna de sus partes. El profesor puede ayudar a los estudiantes a comprender el problema con preguntas como:

- ¿Comprendes todas las palabras utilizadas en el enunciado del problema?
- ¿Cuál es la pregunta? ¿Qué tenemos que encontrar?
- ¿Cuáles son los datos necesarios?
- ¿Cuáles son las condiciones?
- ¿Cuáles son las palabras clave? ¿Qué significan esas palabras?
- ¿Es necesaria toda la información?
- ¿Hay información extraña?
- ¿Puedes expresar el problema con tus propias palabras?

ACTIVIDAD 2: Selecciona el enunciado de mayor complejidad de los problemas elegidos en la actividad anterior. Analiza su enunciado según el listado anterior de preguntas.

Concebir un plan

Una vez que el resolutor se enfrenta a un problema y lo comprende, hay que diseñar un plan para abordarlo y alcanzar la solución. Esta fase no es fácil, y puede que el plan elegido no conduzca a la solución y haya que diseñar otro. En esta fase es importante conocer

© Ediciones Pirámide

estrategias o heurísticos de carácter general que puedan aplicarse en una amplia variedad de problemas. Entre estas estrategias, tenemos:

- Proceder por ensayo y error.
- Resolver un problema más sencillo.
- Resolver un problema equivalente.
- Construir una tabla.
- Hacer un dibujo.
- Usar una operación.
- Buscar un patrón.
- Eliminar posibilidades.
- Resolver un problema análogo.
- Construir un modelo.

El profesor puede formular preguntas y proponer estrategias adecuadas en cada momento referidas a ellas; por ejemplo:

- Construye una tabla.
- Busca un problema parecido a éste que ya conozcas.
- Simplifica las condiciones.
- Empieza con un caso más simple y generaliza.

Más adelante hay enunciados con los que se ejemplifican estas estrategias.

ACTIVIDAD 3: Identifica una estrategia adecuada para abordar la resolución del problema seleccionado en la actividad anterior. Discute con tus compañeros cuál de las estrategias seleccionadas resulta más adecuada.

Ejecutar el plan

Una vez decidido el plan de acción adecuado hay que llevarlo a cabo, es decir, ejecutarlo. Esta fase es más automática, y en ella se emplean algoritmos, destrezas o rutinas aprendidas. Generalmente, es más fácil llevar a cabo un plan que diseñarlo. Ejecutar un plan requiere que el resolutor aplique técnicas de control y verifique cada una de las acciones que realiza, detectando cuándo son correctas o cuándo hay errores. Deben hacerse preguntas como:

- ¿Funciona el plan que hemos trazado?
- ¿Se presentan errores de ejecución?
- ¿Puedo utilizar alguna herramienta informática o calculadora que facilite la ejecución?

ACTIVIDAD 4: Resuelve el problema que vienes considerando en las actividades anteriores. Señala cada uno de los pasos que das durante su proceso de resolución.

Visión retrospectiva

Obtenida la solución del problema, se debe realizar una reflexión sobre el proceso que se ha seguido. Esta práctica puede potenciar la capacidad de resolver nuevos problemas y contribuir a mejorar el pensamiento matemático del que la realiza. Durante el análisis retrospectivo del proceso seguido se pueden hacer preguntas como:

- ¿Es razonable la solución obtenida para el problema?
- ¿Satisface la respuesta a la pregunta planteada?
- ¿Hay otras soluciones?
- ¿Qué aspecto clave ha permitido resolver el problema?
- ¿Hay alguna estrategia más sencilla para resolver este problema?
- ¿Se puede utilizar una estrategia más efectiva?

© Ediciones Pirámide

- ¿Qué pasa si cambiamos alguna de las condiciones del problema?
- ¿A qué otros problemas se puede aplicar el plan seguido para obtener la solución?

ACTIVIDAD 5: Responde a estas cuestiones del listado tomando como referencia el problema que has trabajado en las actividades anteriores.

3.3. Enseñar a través de la resolución de problemas

En este enfoque la resolución de problemas se utiliza como método de enseñanza y forma de aprender matemáticas. Se parte de un problema y se insta a los estudiantes a que indaguen su solución. Durante el proceso de resolución se reorganizan los conocimientos y surgen nuevos aprendizajes, tanto de conceptos como de procesos. El problema puede ser propuesto por el profesor o por los propios estudiantes.

Por ejemplo, un profesor de Primaria que quiere introducir los conceptos de área y perímetro proporciona a los escolares un conjunto de piezas cuadradas a las que llama mesas. Les pide que con varias mesas elaboren configuraciones de mesas de diferentes tamaños. A continuación deben contar el número de mesas (área) de las configuraciones construidas y el número de personas que pueden sentarse (perímetro) (figura 4.2).

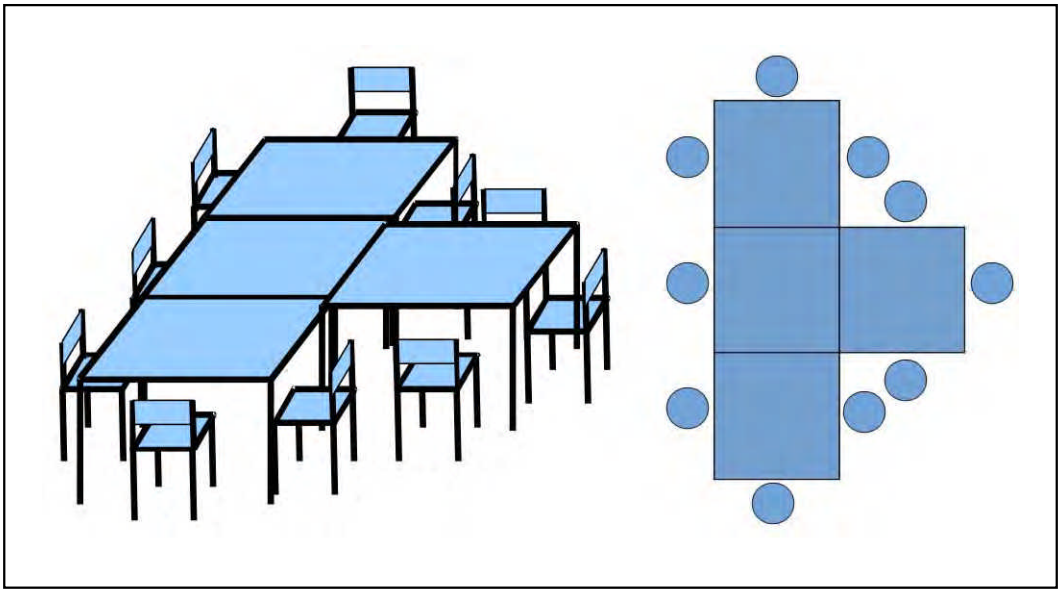


Figura 4.2.—Ejemplo de configuración de mesas.

Se puede proponer que construyan una configuración de mesas para que se puedan sentar 20 personas, o bien modificar una construcción dada para que se puedan sentar un número determinado de personas.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 6: Tenemos la configuración de mesas y sillas de la figura 4.3. ¿Cuántas personas se pueden sentar? Añade mesas para que se puedan sentar 18 personas. ¿Cuántas mesas has utilizado?

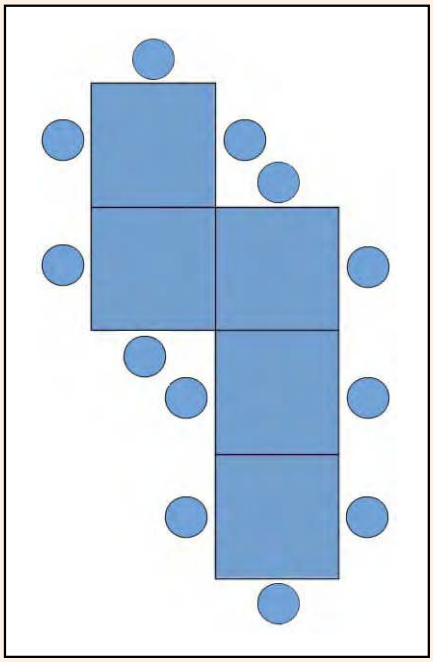


Figura 4.3.—Configuración de mesas del ejemplo.

4. ESTRATEGIAS

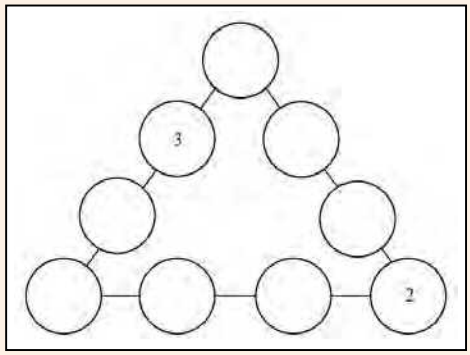
La resolución de problemas en matemáticas implica una serie de procesos complejos: la identificación del problema, la interpretación de lo que hay que hacer, la selección y aplicación de una estrategia para resolverlo, y la evaluación de la razonabilidad de la solución. Los maestros enseñan a los escolares presentándoles una variedad de métodos posibles, particularmente en la selección y la aplicación de estrategias. Las estrategias constituyen el núcleo del contenido y del conocimiento procedimental sobre resolución de problemas. Por ello son relevantes para su aprendizaje y enseñanza.

Hay estrategias generales útiles para resolver problemas en cualquier área de conocimiento, mientras que otras son específicas del área a la que se refiere el contenido del problema. Esto quiere decir que si se quiere adquirir una cierta competencia en problemas cuyo contenido pertenece a un área específica (aritmética, geometría, probabilidad, etc.), se deben estudiar y aprender estrategias específicas de esa área de conocimiento. Cuando el resolutor no conoce estrategias específicas para resolver un problema, suele recurrir al uso de estrategias generales.

Ensayo y error

La estrategia de ensayo y error en resolución de problemas consiste en aceptar una supuesta solución y comprobar si cumple las condiciones del problema. Si la comprobación es satisfactoria, hemos resuelto el problema. Si no las cumple, variamos la solución propuesta inicialmente y comprobamos de nuevo, y así sucesivamente. Si en una de las comprobaciones se observa que la solución propuesta funciona habremos encontrado una solución.

ACTIVIDAD 1: Triángulo mágico. Coloca los números del 1 al 9 en el triángulo, de modo que la suma de cada uno de los lados sea 20.



© Ediciones Pirámide

Hacer un dibujo

Al resolver un problema, a veces los escolares hacen dibujos muy elaborados incluso para el problema más simple, representando su solución final en forma gráfica muy detallada. Los resolutores que se centran en la elaboración de los elementos figurativos superficiales del problema (como la ropa de las personas que comparten los asientos en el autobús) podrían olvidar el aspecto matemático del problema.

Una forma totalmente diferente (con un propósito y resultado diferente) es emplear el dibujo «como» una estrategia para la solución de problemas. El acto de dibujar es a la vez un proceso y un producto, ya que el dibujo (o la representación) se realiza durante la resolución del problema. En este caso, las representaciones matemáticas, en virtud de su uso como soporte para los procesos de pensamiento, son más una representación icónica de una idea, de un proceso numérico o de un concepto matemático.

En el diagrama de la actividad 2 se puede ver que el problema se reduce ahora a contar el número de segmentos que unen los vértices. Si nos centramos en el de cinco vértices, cada vértice se puede conectar con los cuatro restantes, por lo que el número de segmentos es 5×4, pero hay que advertir que el segmento de A hasta B es el mismo que el de B hasta A, por lo que se han contado doblemente. De ahí que la respuestas sea $(5 \times 4)/2$. Esta respuesta puede generalizarse a cualquier número de personas.

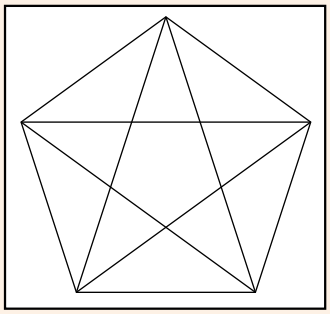
ACTIVIDAD 2: Dibujar diagramas.

Problema. En un torneo de tenis se presentan 5 personas para jugar los partidos de dobles, ¿cuántas parejas se pueden formar?

En este problema se puede recurrir a representar las parejas mediante segmentos que unen dos puntos en el plano. Procediendo de manera inductiva, si sólo hay dos personas A y B, el diagrama es un segmento de extremos A y B.

A ——— B

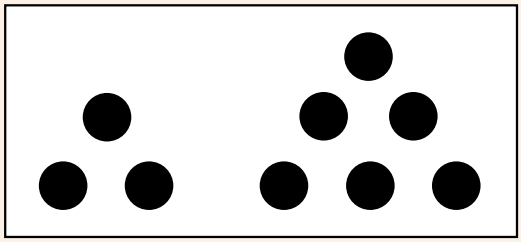
Para cinco personas el diagrama puede ser el siguiente:



Búsqueda de un patrón

En muchas actividades de matemáticas que se realizan en Educación Primaria está presente la búsqueda de una regularidad de un patrón, tanto en su versión numérica como a través de dibujos. En resolución de problemas la búsqueda de una regularidad o patrón es una estrategia de resolución que se suele utilizar en combinación con construir una tabla.

ACTIVIDAD 3: Los números triangulares son aquellos que corresponden al número de puntos con los que se puede formar un triángulo. La figura muestra que el 3 y el 6 son números triangulares.



© Ediciones Pirámide

a) ¿Qué número triangular tiene 7 puntos en el lado del triángulo?
b) ¿Qué número triangular tiene 10 puntos en el lado del triángulo?
c) ¿Es 57 un número triangular?

4.1. Comparar estrategias

Una vez que los escolares, individualmente o en grupo, han resuelto en clase un problema, se puede proceder a comparar las distintas estrategias que han utilizado para resolverlo. Con ello se favorece la visión retrospectiva de la solución, la flexibilidad de pensamiento, la resolución de problemas mediante distintas estrategias y la identificación de distintos caminos que se pueden seguir para resolver problemas.

ACTIVIDAD 4: Se ha puesto a los alumnos el siguiente problema:

Planifica cómo podemos sentar a 29 niños que hay en clase de Primaria si cada una de las mesas tiene cuatro asientos. ¿Cuántas mesas se necesitarían?

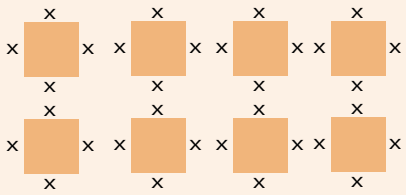
Respuesta de María: He construido la siguiente tabla y buscado en ella la solución.

Mesas	1	2	3	4	5	6	7	8
Personas	4	8	12	16	20	24	28	32

Para 28 personas necesito 7 mesas, como son 29 necesito otra mesa más.

Respuesta de José:

He hecho un dibujo:

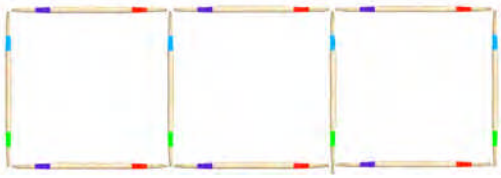


Cada cuadrado es una mesa.
Cada equis es un alumno.
He contado y necesito 8 mesas.

a) Comenta cómo ha ayudado a María buscar un patrón para obtener la solución.
b) Comenta cómo ha ayudado a José hacer un dibujo para obtener la solución.

En el tablón de anuncios de la clase se puede dedicar un lugar a la resolución de problemas. Consistiría en proponer un problema, colgar algunas pistas que puedan servir de ayuda para su solución (busca un patrón, haz una tabla, etc.) y pedir a los escolares que coloquen sus soluciones. Desde las soluciones se promovería un debate y surgirían nuevos interrogantes.

Tablón de anuncios. Problema: El friso de Juan:



Juan está construyendo un friso. Para ello, forma cuadrados con palillos y los coloca de forma consecutiva con un lado en común. La figura muestra que tiene construido un friso con los tres primeros cuadrados. ¿Cuántos palillos necesita Juan para construir una cenefa de 60 cuadrados?

Figura 4.4.—Ejemplo de problema en tablón de anuncios.

© Ediciones Pirámide

5. INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Consideramos conveniente y valioso que los escolares aprendan a resolver problemas en clase de matemáticas. De manera habitual, los problemas que resuelven los escolares son los que contienen los libros de texto o aquellos otros que proporciona el profesor. Raras veces los estudiantes resuelven problemas propuestos por ellos mismos. Sin embargo, los expertos en educación matemática destacan el valor formativo que tiene para los estudiantes proponer personalmente enunciados de problemas, y sugieren incorporar actividades de invención de problemas en la clase de matemáticas. Consideramos que una vía para que los estudiantes progresen en la resolución de problemas consiste en redactar, compartir y resolver sus propios enunciados.

La invención de problemas es una actividad consustancial con la resolución de problemas, y se refiere a la creación de nuevos problemas a partir de una situación dada, a la reformulación de un problema durante el proceso de su resolución, o bien a la formulación de uno nuevo al finalizar otro anterior. La actividad de inventar problemas se puede dar antes, durante y después de resolver un problema dado, y de ahí que aparezca con distintos nombres: plantear problemas, reformular un problema dado, modificar un problema, identificar problemas, etc.

La invención de problemas se considera adecuada para activar la creatividad y para mejorar la compresión matemática de los escolares; también orienta hacia la indagación y mejora la actitud y la motivación hacia las matemáticas. Además, a través de experiencias de invención, los escolares se hacen conscientes de la estructura subyacente a familias de problemas, desarrollan su pensamiento crítico y las habilidades de razonamiento, aprenden a expresar sus ideas con claridad, promueven su curiosidad y mejoran la flexibilidad de su pensamiento.

Una idea central en la invención o planteamiento de problemas es la concepción de que el aprendizaje lo realiza el escolar mediante la construcción compartida de significados, en un medio social y de modo interactivo, implicado en un proyecto de creación de conocimiento.

Se pueden empezar las tareas de invención de problemas con actividades en que los escolares inventen enunciados a partir de los datos de una ilustración.

Tareas posibles a partir de la ilustración 4.5 son las siguientes:

Figura 4.5

- Redacta el enunciado de dos problemas distintos, con los datos de la figura 4.5.
- Inventa ahora el enunciado de un problema que se resuelva con los mismos datos y las operaciones de sumar y restar.
- Redacta otro enunciado que se resuelva con una multiplicación.

ACTIVIDAD 1: Localiza dos anuncios que incluyan datos con los cuales se puedan inventar problemas y en los que se trabaje con números decimales. Localiza otras dos ilustraciones para inventar enunciados que trabajen con fracciones.

© Ediciones Pirámide

También la invención puede hacerse mediante modificación de enunciados de problemas que resultan familiares. Por ejemplo, a partir del problema: *Si tengo una bolsa con 12 caramelos, ¿cuántos caramelos puedo dar a 2 niños (o 4 o 6 o 12 niños)?*

Este problema se puede reescribir o reformular de distintas maneras: se pueden cambiar los números sin que cambie la esencia del problema (18 caramelos y 9 niños), o provocar un cambio importante (12 caramelos y 5 niños). Una alteración que afecta a la comprensión del problema es intercambiar un dato conocido y el dato desconocido, haciendo que uno de los datos se convierta en la cantidad que hay que hallar. Por ejemplo, ¿cuántos caramelos hay en una bolsa si doy 2 caramelos a 6 niños?

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con las técnicas de reformulación de problemas, se les puede proponer actividades de invención más complejas en las que los alumnos deban escribir sus propios problemas. En este caso es conveniente trabajar en dos fases. En la primera el problema se debe inventar respetando ciertas restricciones. Por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que inventen un problema que se resuelva con una operación o que se ajuste a un diagrama dado:

- Escribe un problema que se resuelva con la operación 125 : 5 = 25.
- Escribe un problema de comparación que se resuelva con la operación 18 – 6 = 12.
- Escribe un problema de multiplicación a partir del diagrama de árbol de la figura 4.6.

Estos ejemplos muestran situaciones semiestructuradas. Otro ejemplo de situación semiestructurada sería la siguiente:

Un hombre compra una bicicleta y al año siguiente se la vende a su vecino.

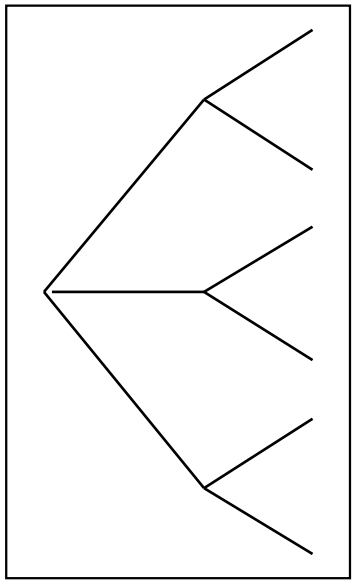


Figura 4.6.—Diagrama de árbol del problema planteado.

- Completa la información de la situación para plantear relaciones matemáticas.
- A partir de la situación reformulada, redacta dos o tres preguntas.

La invención de problemas puede organizarse, en función del grado de estructuración de la situación, en situaciones abiertas, semiestructuradas o estructuradas. En las situaciones abiertas se les pide que generen un problema a partir de una situación real o inventada. Para ello se puede proporcionar a los estudiantes anuncios que aparezcan en los periódicos, propaganda de las rebajas de los comercios o contextos similares.

Ejemplo 1

De situación abierta.

Se les pide a los estudiantes que escriban una carta a un amigo que ha estado enfermo las dos últimas semanas, y le digan lo que ha pasado en

© Ediciones Pirámide

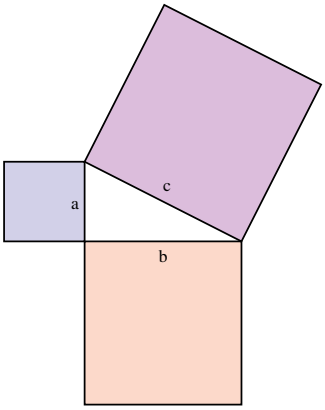
las clases de matemáticas durante ese tiempo. Se les pide que incluyan preguntas como las que se les han formulado en la clase y que elaboren las soluciones para que las conozca su amigo.

Ejemplo 2

De reformulación: el Teorema de Pitágoras.

Como ejemplo de reformulación de enunciados consideramos el enunciado del teorema de Pitágoras:

«En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.»



La figura refleja visualmente este enunciado verbal, que se expresa simbólicamente mediante la igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A partir del teorema de Pitágoras se pueden plantear problemas a los alumnos, cambiando alguna de las condiciones de su enunciado:

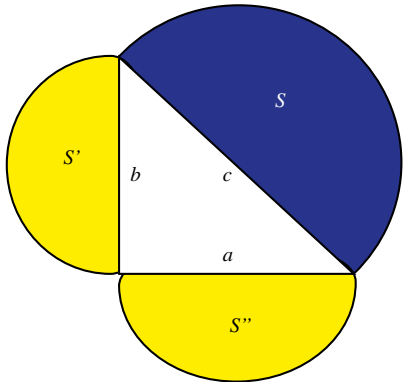
a) Un atributo del teorema de Pitágoras es que las variables están relacionadas mediante el signo igual. ¿Qué ocurriría si las variables estuvieran relacionadas mediante el signo *«<»*, es decir, $a^2 + b^2 < c^2$? ¿Qué interpretación habría que darle?

Ejemplo 3

Extensión de un tipo de problema.

Si sustituimos los cuadrados por semicírculos, ¿se sigue cumpliendo la igualdad? Es decir: ¿El área del semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los semicírculos de diámetros los catetos?

¿Y si los sustituimos por triángulos equiláteros? Enuncia el teorema y comprueba si se cumple.



Ejemplo 4

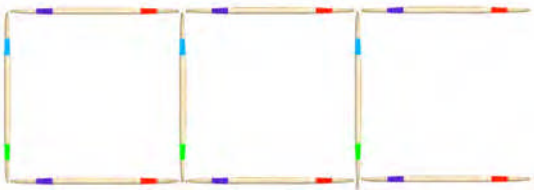
Formulación de problemas mediante generalización y analogía.

A partir de un problema dado por el profesor, a los estudiantes se les pide que formulen problemas nuevos, empleando para ello procesos generales de pensamiento tales como la generalización y la analogía.

Ante un problema como:

Los cuadrados de la figura se han construido empleando palillos. Cuando el número de cuadrados es 5, ¿cuántos palillos se emplean?

© Ediciones Pirámide



Se puede pedir a los estudiantes que inventen problemas similares, cambiando algunas de las partes del problema: el número de cuadrados, la forma de la figura, los objetos que se emplean, etc., procediendo, una vez inventados, a que los resuelvan.

6. EVALUACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Evaluar a los escolares sobre resolución de problemas es una tarea compleja. En la resolución de problemas encontramos un resultado final que se alcanza con la solución que se obtiene y un proceso que se ha seguido para obtener ese resultado. Frecuentemente, la evaluación de la resolución de problemas de matemáticas en el ámbito escolar se centra casi en exclusiva en observar la corrección de la respuesta obtenida. No obstante, hay consenso entre los educadores de que es imprescindible evaluar también el proceso seguido por el estudiante para alcanzar la solución. Alcanzar este objetivo implica efectuar observaciones durante el proceso de resolución, así como realizar inventarios, aplicar escalas analíticas y verificar listas de control que proporcionen conocimiento tanto de los logros cognitivos del alumno como de sus valoraciones afectivas, pues esta información no se obtiene sólo con las pruebas escritas de lápiz y papel.

ACTIVIDAD 1: Construye una lista de control de cinco preguntas con las que evaluar la actitud de los escolares hacia la resolución de problemas de matemáticas.

ACTIVIDAD 2: Aplica la siguiente escala de puntuación analítica a la respuesta dada por un escolar al problema, que se presenta en la figura 4.7.

Escala analítica de puntuación

Comprender el problema:

0: No entiende nada del problema.
1: No entiende alguna parte del problema.
2: Comprende el problema.

Planificar la solución:

0: No lo intenta o sigue un plan inapropiado.
1: Planifica correctamente sólo parte del problema.
2: El plan conduce a una solución correcta del problema.

Ejecución del plan y obtención de la respuestas:

0: No se da respuesta o se obtiene una respuesta errónea basada en un plan equivocado.
1: Error de cálculo, respuesta parcial para un problema.
2: Respuesta correcta.

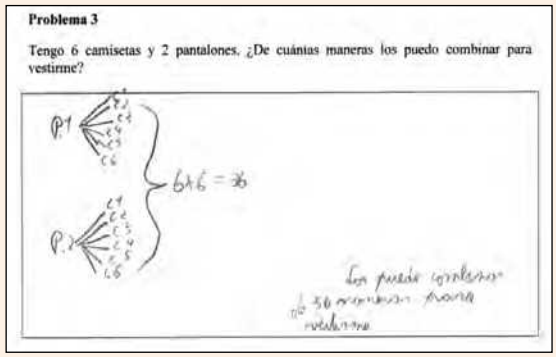


Figura 4.7.—Problema y respuesta de un alumno a la actividad de la figura 4.6.

7. REFLEXIONES DIDÁCTICAS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De los estudios sobre resolución de problemas que hemos revisado y de las ideas plantea-

© Ediciones Pirámide

das se pueden extraer algunas recomendaciones, que sintetizan ideas relevantes para la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares. Entre ellas, destacamos:

- La resolución de problemas es una buena estrategia para el aprendizaje matemático escolar, pues contribuye a que los estudiantes aprendan nuevos conceptos y habilidades.
- La resolución de problemas es un buen método para la enseñanza de las matemáticas escolares. Desarrollar habilidades y destrezas y resolver problemas no son actividades consecutivas, ya que ambas se pueden trabajar simultáneamente.
- La interacción y la discusión entre los estudiantes, las intuiciones que movilizan y las propuestas que hacen para la solución de problemas contribuyen a la construcción de significados compartidos y a mejorar sus aprendizajes.
- Los maestros deben proporcionar a los estudiantes oportunidades para interactuar sobre situaciones problemáticas, así como a alentarlos a redactar enunciados de problemas y métodos propios para su solución. Deben promover la comparación de sus propuestas y el intercambio de ideas con sus compañeros.
- Asignar a grupos de estudiantes una tarea retadora o un problema interesante y observar y tomar nota de las propuestas para su solución que surgen en los grupos pequeños, es una estrategia de instrucción útil.
- Los estudiantes pueden trabajar en pequeños grupos, y después compartir sus interpretaciones y soluciones con todo el grupo. Posteriormente expondrán las estrategias al gran grupo de estudiantes, y el maestro las jerarquizará desde las básicas a las más sofisticadas.
- Los estudiantes de Primaria poseen un bagaje previo sobre resolución de problemas que debe tenerse en cuenta para construir nuevo conocimiento.
- Los estudiantes pueden empezar a plantear y resolver problemas desde los primeros niveles educativos. No hay que esperar a que aprendan algoritmos de cálculo para empezar a plantear y resolver problemas.
- La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas debe ser hilo conductor de la planificación para las matemáticas escolares. Conviene arraigar la idea de que no hay una estrategia óptima que resuelva todos los problemas.
- Se deben resolver distintos problemas con una misma estrategia y reflexionar con los estudiantes sobre por qué unas estrategias son más adecuadas para resolver cierto tipo de problemas.
- También se debe practicar la resolución de un mismo problema con distintas estrategias y comparar las ventajas relativas de cada una de ellas.
- Es necesario proponer a los estudiantes problemas que no tengan solución inmediata, donde ensayen distintas aproximaciones para lograr la solución.
- Los problemas que se propongan deben estimular a los estudiantes y ser adecuados a su nivel.
- Las dificultades que tienen los estudiantes en resolución de problemas se pueden agrupar en función de factores de conocimiento, de creencias y afectos, de control y de factores socio-culturales.
- La evaluación de la resolución de problemas debe destacar el progreso y dominio de procedimientos y estrategias por encima del logro de un resultado.

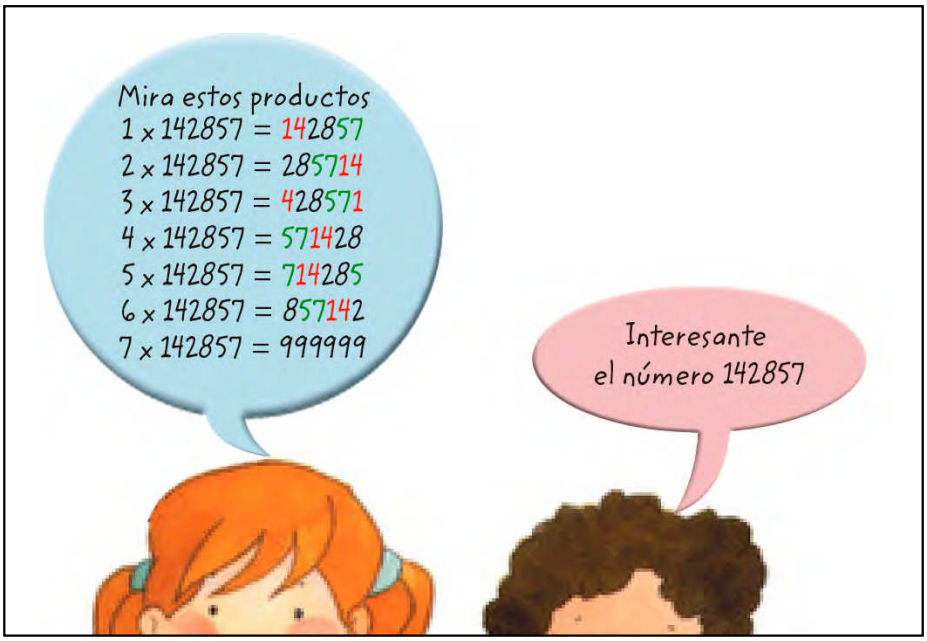
© Ediciones Pirámide

PARTE SEGUNDA

Estudio del sentido matemático escolar

Sentido numérico 5

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
ISIDORO SEGOVIA ALEX



Relaciones numéricas, como por ejemplo las que aparecen en la ilustración, centradas en este caso en el número 142.857, se dan con alta frecuencia para diferentes números. En la mayor parte de los casos dichas relaciones únicamente son percibidas por aquellas personas que están interesadas en el estudio de los comportamientos numéricos, pero pueden ser advertidas con sólo observar detenidamente los números.

ACTIVIDAD

a) Realiza los cocientes indicados a continuación, llegando a obtener hasta seis cifras decimales:

$1 \div 7 =$ ___; $2 \div 7 =$ ___; $3 \div 7 =$ ___;

$4 \div 7 =$ ___; $5 \div 7 =$ ___; $6 \div 7 =$ ___.

b) Comenta con tus compañeros de clase alguna relación entre los resultados obtenidos.

© Ediciones Pirámide

Actividades similares a la propuesta anteriormente y a la de la ilustración inicial, en las que se perciben relaciones entre números, son propias del sentido numérico.

Los números, naturales y racionales (en mayor medida que otros tipos de números), están presentes en el quehacer diario de las personas en el mundo civilizado actual. Constantemente nos vemos avocados a manejarnos de forma adecuada con los números y, por tanto, en la necesidad de poseer cierta capacidad numérica. Cuanto más elevada sea nuestra capacitación numérica, más posibilidades tenemos de enfrentarnos con soltura a ciertos ambientes, que en muchos casos de la vida real están relacionados con la economía. A veces la capacidad numérica de un individuo se reduce a unas pocas destrezas básicas, como pueden ser contar y realizar cálculos sencillos; esto hará que dicho individuo se sienta limitado, tanto en comprensión de ciertas situaciones como en sus actuaciones ante las mismas. Poseer conocimientos y destrezas de nivel más elevado, como puede ser la noción y cálculo del porcentaje, le permitirá comprender y dar respuesta a algunas de dichas situaciones. Por ejemplo, saber cuál es el aumento del coste real de un producto si el IVA es de 21 %, y otras similares. Debido a esta utilidad social, entre otros motivos, se aconseja que se trabaje el sentido numérico en las aulas de Educación Primaria.

En algunas ocasiones es necesario conocer el resultado exacto de una operación, como ocurre con los productos que se recogen en la ilustración inicial, para poder ver las relaciones que tienen dichos resultados con el número 142.857. En otras ocasiones no será necesario conocer con tanta precisión dicho resultado, y será suficiente dar una aproximación del mismo. Así ocurre si un empresario ha de vender 7 pisos por un valor de 142.857 euros cada piso, pues puede pensar e indicar que la cantidad de dinero a recibir por la venta es de casi un millón de euros. Ambas destrezas, calcular con lápiz y papel o mentalmente, forman parte del sentido numérico de las personas. Ante la operación 7×142.857 es importante disponer de una herramienta de cálculo para obtener el resultado exacto (999.999), bien sea el algoritmo de lápiz y papel o el manejo de una calculadora, pero también es importante ser capaz de estimar que el resultado está en torno a un millón.

Las capacidades necesarias para el manejo de los números, desde las básicas a las más complejas, que permiten a las personas desenvolverse de manera autónoma en diferentes situaciones, conforman su sentido numérico. El sentido numérico requiere formas de trabajar los números y las operaciones que, además de la memorización de las rutinas propias de la aritmética, vayan más allá de las mismas. Para este enfoque, los conceptos numéricos han de poseer significado, no ser meros símbolos.

En este capítulo se profundiza en la idea de sentido numérico con el propósito de concretar su significado, se proponen actividades que ayuden a desarrollar el sentido numérico en los lectores de este tema y se dan orientaciones para fomentar el sentido numérico entre los escolares de Educación Primaria.

© Ediciones Pirámide

1. SENTIDO NUMÉRICO

El sentido numérico puede ser caracterizado como un conjunto de capacidades que permite a las personas utilizar los números de forma desenvuelta. Esta utilización flexible debe estar asociada a los diferentes usos de los números, y conlleva una buena intuición sobre las relaciones entre ellos así como dominio de la aritmética mental.

Entre las capacidades que lo caracterizan se encuentran: comprender los distintos significados de los números; conocer en qué situaciones es adecuado el uso de los números; identificar cantidades en situaciones cotidianas; usar métodos cuantitativos para comunicar procesos e interpretar informaciones; discernir cuándo es apropiado dar, como respuesta a una situación planteada, un valor estimado y cuándo un valor exacto; detectar relaciones entre números; percibir y manejar estructuras numéricas; seleccionar hechos, aplicar reglas y evaluar resultados para tomar decisiones sobre los procedimientos de cálculo más adecuados, según los datos disponibles; inventar procesos novedosos, o algoritmos distintos a los usuales, para realizar operaciones aritméticas; establecer comparaciones entre números; reconocer errores numéricos cometidos por otros o por uno mismo; percibir y comprender patrones numéricos; conocer diferentes formas de representar los números y tomar en cada caso la más adecuada, o aceptar diferentes estrategias en la resolución de un problema aritmético. Estas capacidades permiten controlar situaciones que entrañan diversidad de facetas de los conceptos numéricos.

El sentido numérico no es algo estático que unas personas poseen y otras no. Consiste en una competencia cognitiva que se adquiere y desarrolla gradualmente mediante actividad en el campo numérico, como resultado de explorar números y relacionarlos con procedimientos que no se limiten sólo a los algoritmos tradicionales. Esta actividad puede desarrollarse en las aulas o fuera de ellas.

1.1. Capacidades que caracterizan el sentido numérico

Recogemos, en este apartado, algunas de las capacidades que caracterizan el sentido numérico, con ejemplos para hacerlas más comprensibles.

Reconocer cómo y cuándo usar los números

Los números son datos que cuantifican hechos y que aportan precisión al hacer una descripción para transmitir información. Según el

© Ediciones Pirámide

tipo de información que se quiere aportar, será adecuada o no su utilización. Por ejemplo, en una narración sobre la belleza de un paisaje posiblemente no sea necesario utilizar números, pero si en la misma narración se hace alusión a la afluencia del turismo para admirar dicho paisaje necesariamente habrá que utilizar números para indicar la cantidad de visitantes, los porcentajes sobre la procedencia de los visitantes o la comparación de cantidades de visitantes entre diferentes años, entre otras posibles informaciones.

Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado

Según la tipología de la situación que se plantee, exigirá una respuesta exacta o aproximada. Por ejemplo, se hace una estimación del costo de una compra con objeto de llevar dinero suficiente para pagarla, pero se necesita conocer el valor exacto de dicha compra en el momento de hacer el pago.

Detectar y usar relaciones numéricas

Utilizar hechos numéricos que, modificados y adaptados, ayudan a obtener un resultado buscado. Así, se puede utilizar el conocimiento del doble de un número (p. ej., el doble de 7 es 14, el doble de 8 es 16) para determinar la suma de dos números consecutivos (7 + 8 es el doble de 7 y uno más, o el doble de 8 y uno menos, por tanto 15), o utilizar el mismo conocimiento de los dobles de un número para saber la suma del número anterior y posterior a dicho número (la suma 7 + 9 es el doble de 8, y por tanto 16).

Percibir la magnitud de los números

Esto es, lo «grande» que es un número (a veces se utiliza la palabra numerosidad). Tener percepción de la magnitud de los números permite hacer juicios cuantitativos ajustados sobre resultados de operaciones, analizar cantidades y hacer inferencias y estimaciones acerca de valores numéricos. La realización de buenas estimaciones normalmente viene avalada por el desarrollo de una gran dosis de intuición cuantitativa y una precisa sensación de las cantidades representadas por números. Por ejemplo, para algunas personas es muy complicado reconocer la magnitud de números grandes y se pierden al tratar cantidades como decenas de millar y centenas de millar, y no perciben la diferencia entre números como trece mil cuatrocientos (13.400) y ciento treinta y cuatro mil (134.000) si no están asociadas a una situación real, como puede ser la compra de un coche y de una vivienda.

ACTIVIDAD 1:

a) Sugerir dos situaciones de la vida que lleven asociadas números de más de tres cifras.
b) Inventar una actividad basada en dichas situaciones, para proponer a niños de Primaria, donde se aprecie la diferencia de magnitud entre los números.

Realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes

Se trata de la posibilidad de realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes a los usuales para una expresión. Por ejemplo, para calcular el producto 25×48, además de utilizar el algoritmo usual del cálculo, también puede hacerse por el procedimiento que se muestra en la figura 5.1, lo cual aporta facilidad cuando se trata de realizar el producto mentalmente.

$$25 \times 48 = \frac{100}{4} \times 48 = 100 \times \frac{48}{4} = 100 \times 12 = 1.200$$

Figura 5.1.—Producto de dos números sin usar algoritmo estándar.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 2: Analiza el proceso seguido en la resolución del producto anterior y justifica los pasos dados al pasar en cada igualdad de una expresión a la siguiente.

Conocer distintas representaciones de los números y usar la más adecuada

Conlleva la posibilidad de pasar, con seguridad y acierto, de una a otra entre las diferentes representaciones de un mismo concepto numérico, reconocer cuándo una representación es más útil que otra y utilizarla. Como ejemplo se proponen dos casos, uno con números naturales y otro con números racionales.

Los números naturales pueden ser representados de múltiples formas. Así el número 21 puede escribirse en forma polinómica como $2 \times \times 10 + 1$ o como sumas de dos números consecutivos, $10 + 11$, como producto de dos números más suma de otros, $2 \times 5 + 11$, como suma de los seis primeros números, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, entre otras formas. El conocimiento y uso de alguna de estas formas puede ser adecuado para resolver y dar respuesta a algunas situaciones. Por ejemplo, ante la circunstancia de encontrar el término general de la secuencia 1, 3, 5, 7, ..., que también puede escribirse como $1, 1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, \ldots$, se percibe con mayor claridad, en esta segunda forma de escribir la secuencia, que la generalización de la misma puede expresarse como $n + (n + 1)$.

Representaciones posibles para las fracciones son el modelo de área, la recta numérica, par ordenado o número decimal. Si se trata de la comparación de las fracciones 2/5 y 3/7, para decidir cuál es mayor, una representación en modelo de área a mano alzada puede ser engañosa, como se muestra en la figura 5.2. En este caso la representación decimal ($2/5 = 0{,}4$ y $3/7 \approx 0{,}428$) permite una comparación precisa.

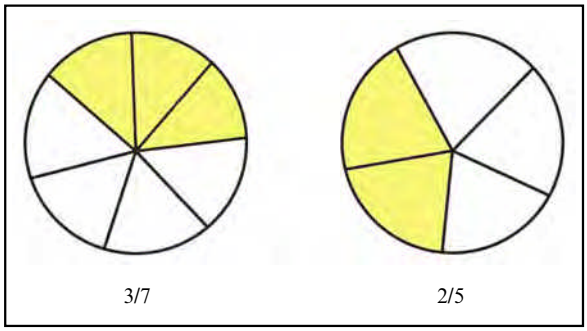


Figura 5.2.—Representación, a mano alzada, imprecisa de las fracciones 3/5 y 3/7.

Tomar el procedimiento más sencillo entre varios posibles

Se refiere a la habilidad de pensar sobre retos cuantitativos de diversas formas y tomar en cada ocasión la que resulte más favorable. Por ejemplo, ante la suma de las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{12}$ hay varias formas de transformarlas en otras equivalentes que tengan el denominador común. Puede hacerse multiplicando numerador y denominador de $\frac{5}{6}$ por 2, llegando a la suma $\frac{10}{12} + \frac{7}{12}$. También puede hacerse por el procedimiento de multiplicar en cruz las fracciones, para obtener los numeradores, y multiplicando los denominadores de las mismas entre sí para obtener el denominador común

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{5 \times 12}{6 \times 12} + \frac{7 \times 6}{12 \times 6} = \frac{60}{72} + \frac{42}{72}$$

O bien obtener el denominador común de las fracciones calculando el mínimo común múltiplo de los denominadores 6 y 12. Para ello hay que descomponer tanto 6 como 12 en producto de factores primos ($6 = 2 \times 3$ y $12 = 2^2 \times 3$) y considerar «todos los factores comunes y no comunes,

© Ediciones Pirámide

elevados al mayor exponente», siendo el denominador común en este caso 12. A continuación, dividir el denominador común obtenido entre cada uno de los denominadores, para encontrar el factor por el que multiplicará el numerador de la respectiva fracción, o sea $12 \div 6 = 2$, y multiplicar la fracción $\frac{5}{6}$, tanto en el numerador como en el denominador, por 2.

ACTIVIDAD 3: De los procedimientos presentados para la suma de fracciones, señala aquel que te parece más adecuado, justificando tu respuesta.

Hacer uso de algoritmos diferentes al estándar

Pese a que los algoritmos de las operaciones básicas se enseñan de una determinada manera, a veces pueden presentar dificultades que algunos escolares no consiguen superar; en esos casos, tomar otro algoritmo puede ser útil si facilita la ejecución del mismo, evitando errores. Por ejemplo, en aquellas restas que presentan una cifra en el minuendo menor que la correspondiente del mismo orden en el sustraendo (como 357 – 183) se puede realizar un cambio en el algoritmo, que consiste en sumar a minuendo y sustraendo un mismo número, de manera que en la nueva resta no aparezca en el minuendo una cifra menor que la del mismo orden del sustraendo, como se indica en la figura 5.3.

$$\begin{array}{r} 357 \\ -183 \\ \hline 174 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{r} +20 \\ +20 \end{array}} \quad \begin{array}{r} 377 \\ -203 \\ \hline 174 \end{array}$$

Figura 5.3.—Uso de un algoritmo no estándar para la resta.

ACTIVIDAD 4:

a) Analiza el cambio hecho en la operación de la figura 5.5. Explica en qué propiedad se basa el cambio realizado.
b) Propón una resta «con llevada» para alumnos de 3.º curso de Primaria y la utilización de la propiedad indicada para transformarla en otra «sin llevada».

Para el mismo algoritmo, ser capaz de utilizar de forma flexible los formatos escritos horizontal y verticalmente permite no asociar una determinada forma de trabajo a estos formatos. Por ejemplo, en la figura 5.4 se reproduce el desempeño de un estudiante cuando realiza una suma y un producto de fracciones.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \\ + \quad \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \\ \hline \frac{11}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ \times \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \\ \hline \frac{6}{4} \end{array}$$

Figura 5.4.—Formas distintas de escribir el mismo algoritmo.

Se percibe que el estudiante realiza la suma de las fracciones correctamente y no así el producto. Al preguntar la profesora al alumno si había tenido en cuenta los signos que indican las operaciones, éste contestó: *Sí, claro, pero tú siempre cambias los números de abajo cuando están escritos de esta manera.* Este estudiante había aprendido a sumar fracciones escritas verticalmente y a multiplicar fracciones escritas horizontalmente, y no tuvo flexibilidad de pensamiento para ver la equivalencia de estas dos posiciones. Aunque reconoció que el segundo caso se trataba de un producto de fracciones, la posición vertical le confundió, asociando la forma de operar al formato de presentación de la operación.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 5: Indica justificadamente en qué forma presentarías a los escolares (horizontalmente, verticalmente o ambas) las siguientes operaciones:

a) *Veintitrés por cuarenta y cinco.*
b) *Siete más nueve.*
c) *Trescientos cincuenta y cuatro por diez.*
d) *Seiscientos cuarenta dividido entre veinte.*
e) *Seiscientos cuarenta y tres más doscientos treinta y cuatro.*

Aceptar diferentes estrategias para resolver un problema aritmético

A veces los problemas se etiquetan según la estrategia asociada al contenido matemático que los puede resolver. Así, se habla de problemas de suma, problemas de producto, problemas de combinatoria, etc., según que sea una operación de suma, de producto o la aplicación de una fórmula de la combinatoria lo que resuelve el problema. Pero en ocasiones los problemas pueden resolverse por varios procedimientos. Sea, por ejemplo, el problema: *Tito ha comprado tres bloques de helado, uno de fresa, otro de chocolate y otro de limón. Quiere hacer helados de dos sabores. ¿Cuántos helados diferentes de dos sabores puede hacer Tito?*

Para resolver este problema, que bien puede ser etiquetado de combinatoria, se pueden utilizar diferentes estrategias.

a) Haciendo un esquema como alguno de los que se muestran en la figura 5.5, donde cada una de las líneas representa un helado compuesto por los dos sabores diferentes que une la línea.

Figura 5.5.—Uso de líneas.

b) A partir de una tabla de doble entrada como muestra la figura 5.6, donde los cuadros sombreados representan los helados posibles que se pueden hacer de dos sabores diferentes.

	Fresa	Chocolate	Limón
Fresa			
Chocolate			
Limón			

Figura 5.6.—Uso de tabla de doble entrada.

c) Realizando el producto 3×2 y dividiendo el resultado obtenido por 2, consecuencia de aplicar la fórmula que permite el cálculo de las combinaciones de tres elementos tomados de dos en dos.

Este es un ejemplo que recoge tres estrategias válidas para resolver el problema planteado de los helados de dos sabores.

ACTIVIDAD 6:

a) Analiza los tres métodos expuestos para resolver el problema de los helados de dos sabores y señala los conocimientos puestos en juego en cada una de ellos.
b) Señala a qué nivel curricular corresponden dichos conocimientos matemáticos.

Hemos ejemplificado en este apartado, mediante actividades, algunas de las capacidades que caracterizan el sentido numérico. En el apartado dedicado a la enseñanza se presentarán ejemplificadas otras capacidades. Todas ellas

© Ediciones Pirámide

constituyen un amplio repertorio, que puede tomarse como muestra para la elaboración de tareas que contribuyan a promover el sentido numérico de los estudiantes de Educación Primaria.

ACTIVIDAD 1: Consulta los documentos curriculares actuales para la Educación Primaria y resume las ideas que contiene, relacionadas con el sentido numérico.

2. TRATAMIENTO CURRICULAR DEL SENTIDO NUMÉRICO

Los documentos curriculares que regulan la enseñanza de las matemáticas en niveles de Educación Primaria, tanto españoles como de otros países de nuestro entorno, se hacen eco del interés de potenciar el sentido numérico de los escolares. En estos documentos se aboga porque el primer objetivo en la enseñanza de los números y las operaciones, en la escuela elemental, debe ser el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas, que puede ser expresado mediante capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, o utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados mediante diversos procedimientos.

Se recoge en distintos currículos que poseer un buen sentido numérico conlleva una amplia comprensión del significado de los números, para establecer y descubrir relaciones múltiples entre ellos, reconocer la magnitud relativa de los números, conocer los efectos de las operaciones con números y desarrollar referentes para la medida. Todo ello proporciona, a los individuos que lo poseen, habilidad para descomponer números de forma natural, utilizar ciertos números como 100 o 1/2 como referentes, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, o estimar y comprender el sistema de numeración decimal.

El sentido numérico no es tratado en el currículo como un contenido nuevo a estudiar, sino como una forma de aprender y comprender los números que debe influir y manifestarse en una manera flexible de utilizarlos. Para ello se sugiere que los aprendizajes de los distintos tipos de números y las operaciones se promuevan de forma contextualizada, a través de situaciones variadas y próximas a los escolares. Se aconseja el empleo de materiales como regletas Cuisenaire, bloques multibase y ábacos. También se indica que se promueva en el alumnado la utilización de distintas herramientas para el cálculo, como los algoritmos usuales de lápiz y papel, la calculadora, el cálculo mental y la estimación, razonando cuál de estas herramientas es más adecuada en cada momento. Se hace hincapié en que los problemas se consideren como un recurso para el trabajo con comprensión de las operaciones aritméticas.

2.1. Capacidades a desarrollar según distintos estudios

Sobre las capacidades a desarrollar por los alumnos, en relación con el sentido numérico, distintos estudios e investigaciones han proporcionado un conjunto muy amplio. Algunas de esas capacidades las hemos tratado en el apartado 1 de este tema. Recogemos a continuación un listado de las que consideramos más significativas en este ámbito:

- Habilidades elementales o intuiciones acerca de los números y la aritmética.

© Ediciones Pirámide

- Facilidad para aproximar o estimar.
- Componer y descomponer números de manera espontánea.
- Habilidad para desarrollar estrategias con las que resolver problemas aritméticos.
- Utilizar números y métodos cuantitativos para comunicarse, procesar e interpretar información.
- Poseer conocimiento sobre los diferentes niveles de precisión y sensibilidad de la razonabilidad de los cálculos.
- Capacidad para comprender y establecer múltiples relaciones entre los números.
- Desarrollar patrones numéricos y de medida, de referencia y utilización de los mismos en respuestas a situaciones reales.
- Facultad para reconocer errores numéricos.
- Entender y utilizar formas diferentes de representaciones de los números y utilizar la más adecuada, dependiendo del contexto y el propósito de la representación.
- Considerar los números como conocimiento útil y las matemáticas como ciencia de patrones, es decir, las matemáticas estudian la regularidad.
- Desarrollar una sólida comprensión y una buena intuición sobre la magnitud relativa de los números.

ACTIVIDAD 2: Elige dos de las capacidades presentadas y enuncia para cada una de ellas una tarea que la promueva en los estudiantes de Educación Primaria.

Estas capacidades están presentes en la competencia matemática escolar que se describe en el informe PISA 2012, donde se señala la alfabetización matemática como «la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que juegan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos» (OCDE, 2013, p. 4).

En dicho informe se alude a la cantidad como aspecto dominante para desenvolverse en el mundo. Con la cantidad estarían asociadas acciones tales como la cuantificación, la representación de dicha cuantificación, las relaciones y argumentos e interpretaciones basadas en la cantidad. Considera al sentido numérico como un aspecto del razonamiento cuantitativo que involucra representaciones múltiples de los números, elegancia en la realización de los cálculos, capacidad de realizar cálculos mentales y estimaciones, y la evaluación de la razonabilidad de los resultados como la esencia de la alfabetización matemática relativos a la cantidad.

3. ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR EL SENTIDO NUMÉRICO EN PRIMARIA

Las personas, desde la infancia, al desenvolverse en una sociedad donde los números están muy presentes dan muestras de poseer cierto sentido numérico al entender y dar respuestas a situaciones que involucran números. Posteriormente, el trabajo sistemático en el aula contempla entre las expectativas de aprendizaje las capacidades asociadas al sentido numérico y su aplicación para dar solución a situaciones reales, lo que hace posible que este sentido numérico se potencie y desarrolle a lo largo de la vida.

Una enseñanza enfocada a que los escolares adquieran capacidades relacionadas con el sen-

© Ediciones Pirámide

tido numérico requiere métodos de trabajo en el aula que potencien:

a) La importancia del desarrollo de sentido numérico a través del trabajo con situaciones en las que se aprecie su utilidad.
b) La creación de un clima positivo para que los estudiantes comprendan y usen los números en situaciones familiares, que se puedan enfocar desde distintas formas de solución y fomenten un aprendizaje cooperativo, en el que se acepten los juicios de los estudiantes aunque no sean correctos, dando oportunidades para mejorarlos.
c) El diseño de tareas matemáticas escolares que estimulen al desarrollo del sentido numérico, en las que tengan un papel importante los materiales manipulativos, las representaciones gráficas como la línea numérica y otros patrones (números triangulares, cuadrados, etc.), que permitan visualizar relaciones numéricas, así como el uso de la calculadora como herramienta que facilita la exploración de dichas relaciones.

De acuerdo con estas recomendaciones y las directrices curriculares recogidas en el apartado 2 de este tema, las tareas matemáticas escolares, desde los primeros niveles de Educación Primaria, pueden ser planteadas en diferentes ámbitos: escolar (estrictamente numérico), personal y familiar, público y social, o del entorno cercano, donde los resultados numéricos adquieren mayor significación para los escolares. Las situaciones pueden presentarse en algún contexto específico que no sea el puramente aritmético, como puede ser un juego o una competición.

3.1. Tareas con las que trabajar el sentido numérico

Como se indica en los documentos curriculares, el sentido numérico no es un contenido ni un tema a estudiar, sino una competencia transversal en el trabajo que realicen los escolares, que involucre números en cualquier tema. De ahí que las tareas matemáticas a considerar sean de una gran diversidad. Proponemos en este apartado, y a modo de ejemplo, algunas tareas, señalando la meta que se puede conseguir en cada una, asociada a una capacidad del sentido numérico, así como el nivel escolar aproximado en que los estudiantes las pueden trabajar y los materiales y recursos a utilizar para su desarrollo. Un primer bloque recoge tareas estrictamente numéricas, cuya resolución conlleva establecer relaciones numéricas. Los estudiantes se implicarán en ellas si están motivados por el trabajo matemático en sí mismo. En un segundo bloque se recogen tareas diseñadas de acuerdo a un contexto. En estos casos, los resultados de las actividades dan respuestas a situaciones concretas, lo que puede provocar que los estudiantes se impliquen en ellas, motivados por el interés que suscite conocer la respuesta a las situaciones involucradas en las tareas.

Situaciones escolares

Ejemplo A

Meta: reconocer referencias numéricas.

Nivel: últimos cursos de Infantil y primero de Primaria.

Formulación de tareas:

a) Encontrar números próximos a uno dado, y reconocer si dos números son próximos a un tercero.

© Ediciones Pirámide

b) Hacer estimaciones en contextos reales y realizar cálculo mental con números pequeños.
c) Trabajar secuencias numéricas (de dos en dos, de tres en tres, etc.).
d) Explorar una variedad de formas en las que los números pueden ser escritos como composición de otros.

Materiales y recursos: papel y lápiz, cálculo mental, uso de regletas.

Ejemplo B

Meta: fomentar el cálculo mental y el proceso de contar.

Nivel: últimos cursos de Infantil y primero de Primaria.

Formulación de la tarea: colocar en la palma de la mano algunos objetos pequeños; la cantidad dependerá de la capacidad del niño para contar. Pedir a los niños que cuenten para saber los objetos que hay. Cerrar la mano y agregar a la mano algunos objetos más, por ejemplo tres, y preguntar: *¿Recordáis los objetos que tenía en la mano? He añadido tres objetos a los que tenía en la mano. ¿Cuántos tengo ahora?* Se abre la mano y se vuelve a contar para ver si la respuesta es correcta. Se puede repetir cambiando la cantidad de objetos iniciales o/y los que se añaden. Otra variante es quitar objetos en vez de poner. También se puede cambiar la mano por una caja, etc.

Materiales y recursos: objetos separados, canicas, garbanzos, piedras pequeñas...

Ejemplo C

Meta: fomentar el cálculo mental con números enteros, decimales y porcentajes.

Nivel: últimos cursos de Primaria.

Formulación de la tarea:

a) Sin realizar la operación, selecciona las parejas de cálculos que tienen el mismo resultado: ($8 \times 4{,}5$ y 4×90); ($1{,}8 \times 3{,}5$ y $18 \times 0{,}35$); (88×87, 90×85).
b) Sin utilizar lápiz ni calculadora, calcula el 10% de 3.560. Explica cómo lo has hecho.

Ejemplo D

Meta: adquirir capacidad de utilizar diferentes representaciones simbólicas de un mismo número (descomposición de números).

Nivel: últimos cursos de Primaria.

Formulación de la tarea: expresa el número 13 de otras formas diferentes a las siguientes: $10 + 3$, $2 \times 5 + 3$, $3 \times 4 + 1$, $7 \times 2 - 1$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 - 3$, doble de 6 más 1.

Materiales y recursos: lápiz y papel, calculadora.

Ejemplo E

Meta: desarrollar la capacidad de estimar con números mayores de dos cifras.

Nivel: último curso de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de las tareas:

a) Expresa el número 36.459 de forma aproximada mediante redondeo o truncamiento de sus cifras, de manera que la diferencia con el valor exacto sea inferior al 30%. Intenta hacerlo sin utilizar ninguna herramienta de cálculo.
b) Estima el resultado de la operación 2.895×245 y explica el proceso seguido.
c) Indica cuáles de los siguientes cálculos puedes hacer sin utilizar calculadora

© Ediciones Pirámide

ni los algoritmos de lápiz y papel: $7 \times \times 3.000$; 123×69; 12×15; $8 \times 4{,}5$.

d) Escribe un número en el numerador o denominador que haga que las siguientes fracciones sean:

1. Próximas a cero: /6, /10, 1/ ; 3/
2. Próximas a un medio: 7/ ; /6; 4/ ; /9
3. Próximas a uno: 4/ ; /12; 6/ ; /7

Materiales y recursos: lápiz y papel.

Ejemplo F

Meta: establecer relaciones numéricas.

Nivel: últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de tareas:

a) Expresa el número 10 utilizando el número 3 cinco veces y los símbolos de las operaciones aritméticas que sean necesarios.

b) Descompón la esfera del reloj en seis partes, de manera que en cada parte la suma de los números sea la misma.

c) Encuentra el valor numérico de cada letra para que sea correcta la igualdad $AB \times AB = ACC$.

Materiales y recursos: lápiz y papel, calculadora.

ACTIVIDAD 1: La siguiente reflexión corresponde a algunos de los criterios a considerar para detectar si hay errores en el resultado obtenido en la operación $263 + 175$: ha de ser mayor que 300; menor que 500; mayor de 400, pues 63 más 75 es mayor que 100; tiene un 8 en las unidades.

Supón que trabajas con alumnos de Primaria, los cuales han de dar criterios que permitan detectar si hay errores en los resultados de las operaciones siguientes, antes de obtener el resultado: *a*) 84×26; *b*) $16 \times 3{,}12$; *c*) $1/2 + 2/3$; *d*) 12 % de 200.

1. Indica, para cada caso, criterios dados por los estudiantes que consideres válidos.
2. Escribe, para cada caso, otros dos criterios que no considerarías válidos.

Ejemplo G

Meta: descubrir, continuar y proponer patrones.

Nivel: últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de la tarea: observa los patrones de estas sumas, descríbelos y construye otros diferentes.

a) $16 + 24 = 40$; $17 + 23 = 40$; $18 + 22 = 40$; $19 + 21 = 40$, $20 + 20 = 40$

b) $12 + 9 = 21$; $14 + 7 = 21$; $16 + 5 = 21$; $18 + 3 = 21$; $20 + 1 = 21$

c) $50 + 20 = 70$; $55 + 15 = 70$; $60 + 10 = 70$; $65 + 5 = 70$; $70 + 0 = 70$

Materiales y recursos: lápiz y papel.

Ejemplo H

Meta: descubrir y justificar aritméticamente regularidades en la tabla de los cien primeros números.

Nivel: últimos cursos de Primaria.

Formulación de la tarea: en la tabla de la figura 5.7, completa la primera fila y coloca un cero delante de todos los dígitos (por ejemplo, 01, 02, 03...); considerando la segunda columna, todos los números son de dos cifras y aca-

© Ediciones Pirámide

ban en 2, las primeras cifras de estos números forman la secuencia numérica convencional, comenzando desde 0, y la diferencia entre dos números consecutivos es 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 5.7.—Tabla 100.

i) Descubre otras regularidades en diferentes líneas, verticales, horizontales y oblicuas.
ii) Da una explicación aritmética a las regularidades.

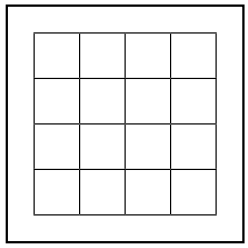
Materiales y recursos: lápiz, papel y tabla de los cien primeros números.

Ejemplo I

Meta: plantear conjeturas y comprobar si son o no correctas; encontrar patrones, percibir la regularidad del patrón y enunciarla.

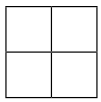
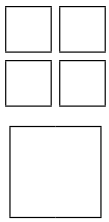
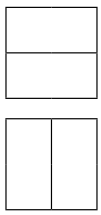
Nivel: últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de la tarea: la figura siguiente representa una cuadrícula 4×4. En la misma se pueden ver cuadrados y rectángulos, como resultado de componer los cuadrados de la cuadrícula.



1. Realiza una conjetura sobre si el número de cuadrados que se forman en la figura es mayor, igual o menor que el de rectángulos.
2. Cuenta los cuadrados de la cuadrícula de la figura.
3. Cuenta los rectángulos que hay en la misma cuadrícula (incluye también los cuadrados).
4. Compara los resultados obtenidos en los apartados 2) y 3) y comprueba tu conjetura para refutarla o aceptarla.
5. Organiza los datos de forma que se vea un patrón en ellos.
6. De acuerdo con dicho patrón, calcula el número de cuadrados y rectángulos que hay en una cuadrícula 6×6.

Te damos una pista para organizar los datos. Continúa la tabla un lugar más.

Lado	Figura	N.º de cuadrados	N.º de rectángulos
1×1		1	1
2×2		5 	$5 + 4 = 9$ 

© Ediciones Pirámide

Materiales y recursos: lápiz, papel y tabla donde se recoja la pista a proporcionar.

Ejemplo J

Meta: aplicar propiedades de las operaciones aritméticas.

Nivel: Secundaria.

Formulación de la tarea: las diferentes potencias de 2 (2^n) pueden ser obtenidas mediante el proceso de doblar sucesivamente los números que se obtienen, a partir del doble de 1. Así, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...

Además, cualquier número natural se puede escribir como suma de potencias de 2 (por ejemplo, 7 = 1 + 2 + 4).

1. Comprueba esta afirmación con los diez primeros números.
2. Escribe 57 como suma de potencias de dos.

Los antiguos egipcios usaban la propiedad descrita anteriormente para multiplicar números naturales. Así, el producto 7 × 57 usando el procedimiento de los dobles sería como se muestra en la figura 5.8.

Dado que 7 = 1 + 2 + 4, el producto 7 × 57 es

1 →	57
2 →	144
4 →	228
Total	399

Figura 5.8.—Producto de 7 × 57.

3. Justifica esta forma de obtener el resultado del producto de los números 7 × 57. Ayúdate de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Materiales y recursos: papel, lápiz, calculadora.

ACTIVIDAD 2: Realiza la tarea anterior y propón una redacción de la misma apropiada a estudiantes de 6.º curso de Primaria.

Situaciones en contexto

Ejemplo K

Meta: establecer relaciones numéricas ligadas a la proporcionalidad entre números. Desarrollar el razonamiento lógico.

Nivel: últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de la tarea: en el colegio Entre Ríos celebran la fiesta de la comunidad y realizan un concurso gastronómico llamado «chocolate con leche» en el que participan alumnos con sus padres. Gana el premio el grupo que elabore el mejor chocolate con leche.

Tres grupos se han presentado al concurso, designándose como grupos A, B y C.

Los grupos han preparado el chocolate con leche del siguiente modo:

Grupo A. Por cada 4 tazas de leche pone 6 cucharadas de chocolate.

© Ediciones Pirámide

Grupo B. Por cada 6 tazas de leche pone 8 cucharadas de chocolate.

Grupo C. Por cada 5 tazas de leche pone 7 cucharadas de chocolate.

1. Analiza las tres composiciones de «chocolate con leche» e indica cuál de los tres grupos hace el chocolate más espeso.

   Los tres grupos han utilizado el mismo tipo de leche y de chocolate. La leche la han comprado a 1,20 € el litro y el chocolate a 2,3 € el kilo.
2. Indica cuál de los tres grupos ha gastado más dinero en su preparación, si cada uno de los grupos ha usado 2 litros de leche.

Materiales y recursos: lápiz y papel.

Contexto: social.

Ejemplo L

Meta: componer cantidades posibles a partir de otras dadas.

Nivel: últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Formulación de la tarea: Mati y Rafa juegan con monedas de 20 céntimos, de 5 céntimos y de 2 céntimos.

El juego consiste en mantener las monedas guardadas en el bolsillo. Uno de los dos jugadores toma tres monedas en su mano, que mantiene cerrada, y el otro jugador ha de averiguar la cantidad de dinero tomado, pudiendo decir hasta tres cantidades. Comienza Mati tomando tres monedas. Rafa dice: *la cantidad de dinero que tienes en la mano puede ser 48 céntimos o 12 céntimos o 19 céntimos.*

1. Analiza si Rafa ha dado una respuesta adecuada.
2. Escribe en una tabla todas las respuestas correctas que se pueden dar.

   Al finalizar el juego Rafa dice: *A mí me han regalado seis monedas que he puesto en mi hucha, y entre todas hacen 42 céntimos. Averigua qué valor tienen las monedas que me han regalado.*
3. Escribe posibles respuestas correctas que puede dar Mati.

Materiales y recursos: lápiz, papel, monedas de 20 céntimos, 5 céntimos y de 2 céntimos.

Contexto: personal de juego.

Ejemplo M

Meta: reconstruir secuencias numéricas buscando el patrón seguido.

Nivel: Secundaria.

Formulación de la tarea: la profesora de matemáticas de Leo había escrito en la pizarra una tabla con números y le pide que la analice y descubra el criterio que ha seguido para hacerla. Leo, en un descuido, ha borrado unos cuantos números, quedando la tabla como se ve en la figura 5.9.

La profesora le dice: *No importa, analizando los números que han quedado puedes descubrir el criterio seguido y volver a escribirlos.*

Después de mirar detenidamente la tabla Leo dice: *creo que el número que falta entre 16 y 64 es 32, pero el resto no sé cuáles son.*

© Ediciones Pirámide

2	5	7	20	
4	9	13	40	
8	17		80	96
16	33		160	175
	65	97	320	
64		193	640	655
128		385		1.295
256	513	769		2.575

Figura 5.9.—Tabla de números.

1. Estudia la tabla y decide si estás de acuerdo con Leo sobre su afirmación.
2. Ayuda a Leo a encontrar el resto de los números.
3. Añade una nueva columna al cuadro que ha escrito la profesora.

Materiales y recursos: lápiz, papel y tabla con las secuencias numéricas como la de la figura.

Contexto: escolar.

ACTIVIDAD 3:

a) Resuelve la tarea anterior.
b) Adapta la tarea para estudiantes de 5.º curso de Primaria.

ACTIVIDAD 4: Propón una situación en un contexto público profesional en la que se trate de trabajar con la comparación de fracciones.

3.2. Modificación de tareas

Muchas de las actividades numéricas normalmente se presentan en un contexto escolar puramente matemático, pero se pueden transformar en una situación referida a otro contexto. Presentamos dos ejemplos en los que se realiza una modificación a una tarea para adaptarla a un contexto.

Ejemplo 1

Enunciado de una tarea numérica. *Halla el mayor y el menor número que se pueden obtener mediante sumas entre los números 5, 15, 20, 25 y 50. Halla también sumas posibles de dos y de tres sumandos a partir de estos números.*

Posible enunciado de la misma tarea adaptada a un contexto personal de juego: Paula, Jaime y Luis han estado jugando con una diana como la que aparece en la figura 5.10, a la cual se tiran pelotas adhesivas.

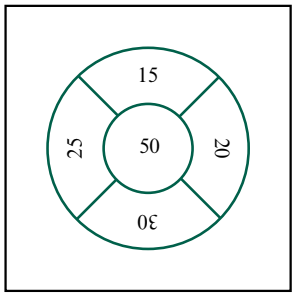


Figura 5.10.—Diana.

Antes de empezar establecen algunas normas:

- Cada sector indica una puntuación que se obtiene cuando la pelota se pega en él.
- En cada sector puede pegarse más de una pelota.

© Ediciones Pirámide

- Si la pelota no se pega en ningún sector, la puntuación será de cero.

La primera vez han jugado con dos pelotas cada uno:

1. Indica cuál es la máxima y la mínima puntuación que pueden obtener.
2. Indica en qué regiones de la diana han podido caer las pelotas para conseguir las puntuaciones que aparecen en la tabla.

		Pelota A	Pelota B
Ejemplo	65 puntos	15	50
Paula	50 puntos		
Jaime	80 puntos		
Luis	45 puntos		
Paula	40 puntos		
Jaime	55 puntos		
Luis	75 puntos		

3. Justifica cuál de los tres amigos ha ganado esta partida de dos jugadas.

Para una segunda partida utilizan tres pelotas. Justifica si las puntuaciones que aparecen en la tabla son o no son correctas.

Puntuación	Es correcto	Justificación
100	Sí	50 + 30 + 20
93		
45		
80		
95		
95		
60		

Ejemplo 2

Enunciado de una tarea numérica: *Encontrar un número tal que da de resto 1 al dividirlo entre dos, entre tres y entre cuatro.*

Posible enunciado de la misma tarea adaptada a un contexto de juego: Iris propone a Teo lo siguiente:

Te doy mis cromos si sabes cuántos tengo después de lo que te voy a explicar. *Al total de mis cromos les pasa que si los junto en montones de dos me sobra uno, si los reúno en montones de tres me sobra uno, y si los pongo en montones de cuatro también me sobra uno.*

Después de reflexionar, Teo le pregunta a Iris: *¿Solo puedo decir un número o puedo decir más de uno?*

1. Investiga y explica por qué Teo hace esa pregunta a Iris.
2. Analiza las posibilidades que tiene Teo de dar la respuesta correcta si Iris le dice que sólo puede decir un número.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 5: Resuelve las situaciones anteriores, e indica para cada una de ellas cuál es la meta que se pretende alcanzar, el nivel en el que trabajarlas y los materiales y recursos necesarios para desarrollarlas.

ACTIVIDAD 6: Transforma la actividad *Comprueba si es correcta la siguiente expresión 4/5 < 2/3* en una situación cuyo contexto sea de la vida cotidiana y la puedan resolver estudiantes que tengan conocimientos sobre la ordenación de fracciones.

4. EVALUACIÓN

La evaluación del sentido numérico debe centrarse en la observación del trabajo individual y en grupo realizado por los escolares. Se debe analizar cómo expresan sus argumentos, cómo resuelven las situaciones planteadas, qué capacidades del sentido numérico muestran y cuáles no ponen de manifiesto, para insistir en ellas.

Mostramos algunos casos de desempeño inadecuado de estudiantes, con objeto de analizar qué capacidades del sentido numérico hay que reforzar[1].

Caso 1. Un alumno que ha de realizar la suma 2/9 + 1/3 presenta el proceso recogido en la figura 5.11.

ACTIVIDAD 1: Analiza el desempeño de este estudiante frente a la tarea propuesta y señala aquellas capacidades del sentido numérico que no muestra haber adquirido.

Caso 2. Un alumno de 12 años dice que el número que sigue a 6.399 es el 63.100.

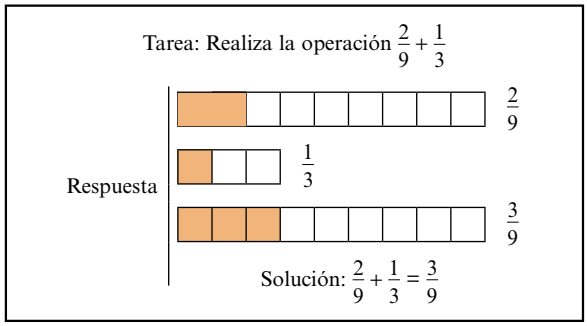


Figura 5.11.—Tarea propuesta.

ACTIVIDAD 2: Describe el error de este alumno en la tarea propuesta y señala capacidades del sentido numérico que eviten el error.

Caso 3. Un alumno dice que veinticinco céntimos se expresa numéricamente 0,25 cts.

ACTIVIDAD 3: Describe el error de este alumno y da alguna pauta asociada al sentido numérico para evitarlo.

Caso 4. Un porcentaje muy alto de estudiantes de 11 años, al ordenar decimales escriben: 0,23 > 0,07 > 0,1.

ACTIVIDAD 4: Identifica las causas de este error y elabora alguna estrategia relacionada con el sentido numérico que trate de evitarlo.

Caso 5. Un porcentaje muy bajo de estudiantes de 12 años saben indicar cuál es el valor más próximo al resultado de 0,29 × 7,1 de entre los siguientes:

0,002 0,02 0,2 2 20 200 2000

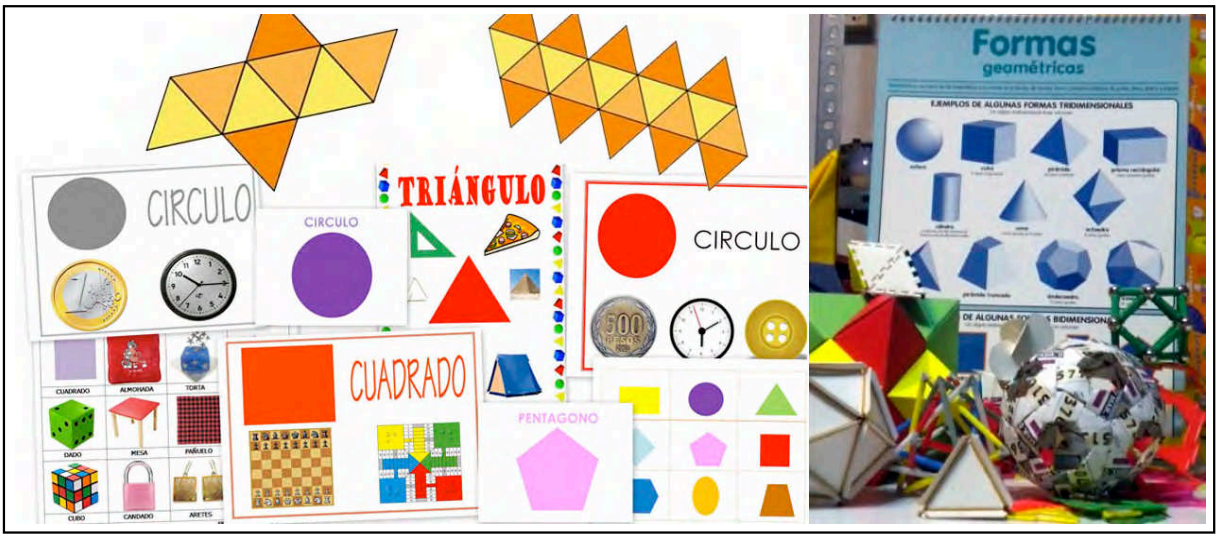
ACTIVIDAD 5: Identifica las causas de este error y elabora alguna estrategia de enseñanza que trate de evitarlo.

[1] La mayoría de los errores están tomados de Dickson, Brown y Gibson (1991).

© Ediciones Pirámide

6 Sentido espacial

PABLO FLORES MARTÍNEZ
RAFAEL RAMÍREZ UCLÉS
AURORA DEL RÍO CABEZA



La enseñanza de la matemática actual persigue que los escolares, ciudadanos en formación, se desenvuelvan en su entorno personal, social, laboral, físico y técnico, de la manera más eficiente posible. Entre las necesidades del ciudadano está la de ubicarse y desplazarse en el medio, ecológico y social, en que se encuentra, en sus territorios y lugares. Para ello ha de situarse en el espacio circundante, localizar los objetos que le rodean, establecer su posición relativa, estructurar referencias, medidas y relaciones, entender los cambios de posición y los desplazamientos. La geometría proporciona buenas herramientas que ayudan a lograr estos fines.

En términos generales, la geometría se considera como aquella disciplina que estudia las formas del plano y las figuras o cuerpos del espacio; es la ciencia de las formas y del espacio y sus medidas. La geometría es parte importante de la matemática, y proporciona a los escolares una apreciación profunda del mundo que les rodea. Formas y figuras geométricas se encuentran en el mundo natural, así como en las diversas áreas creativas y del ingenio humano.

© Ediciones Pirámide

La geometría estudia el espacio a partir de formas ideales, abstracciones que representan los objetos reales que nos rodean, junto con sus movimientos y otras transformaciones. La enseñanza funcional de la geometría tiene que ayudar al aprendiz a ubicarse y desplazarse en el espacio, suministrándole herramientas y referentes para identificar formas y utilizarlas para resolver problemas. Dado que las personas recibimos la información a través de los sentidos, especialmente el auditivo y el visual, los medios utilizados con mayor frecuencia para elaborar, transmitir y recibir conocimiento matemático son los enunciados verbales y las representaciones gráficas o simbólicas de conceptos y de propiedades. Aunque las formas y figuras se puedan transmitir por enunciados verbales, su captación se hace principalmente por la vista, e igualmente por el tacto.

Para construir conocimiento geométrico, y estudiar las figuras y las formas, las personas requieren imágenes geométricas y representaciones gráficas, físicas o virtuales. Cuando en una representación predominan las imágenes, hablamos de visualización. Este término se emplea, indistintamente, para hacer referencia a figuras o representaciones pictóricas tanto externas (con soporte físico o virtual) como internas (del pensamiento). La noción de visualización está ligada con la capacidad de elaborar y procesar imágenes y pensar mediante ellas.

Hay aspectos del conocimiento matemático que se expresan por medio de imágenes y representaciones, gráficas o materiales. La visualización en matemáticas consiste en formar imágenes de un concepto, transformarlas y usarlas de forma efectiva, para descubrir, comprender y pensar las matemáticas. En estas imágenes se emplean dibujos o materiales, como los sólidos de madera para representar los poliedros, o las construcciones en el geoplano para representar polígonos.

© Ediciones Pirámide

1. SENTIDO ESPACIAL

El sentido espacial es la competencia de un sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Por ello, el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas. Sin estas capacidades, resultaría difícil desenvolverse en ese mundo.

El sentido espacial surge de la percepción intuitiva del propio entorno y de los objetos que allí se encuentran, siendo la vía que da acceso a los objetos físicos y que permite a los estudiantes confiar en su conocimiento visual. El desarrollo de las capacidades que caracterizan el sentido espacial proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas por medio de la visualización.

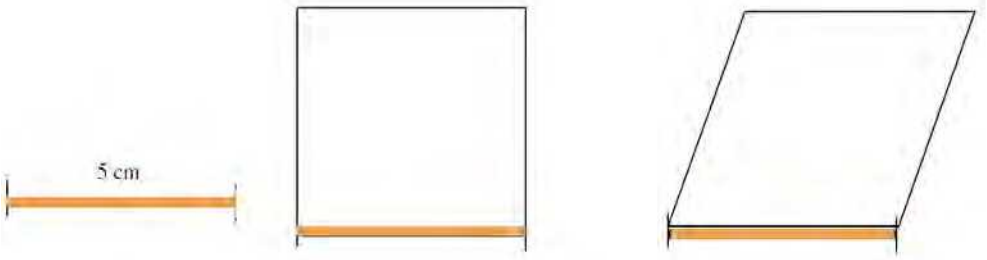
Cuando los sujetos se orientan en el espacio manifiestan su sentido espacial, en tanto que identifican con precisión las formas de los objetos, aprecian semejanzas y diferencias, anticipan movimientos sin necesidad de hacerlos y generan esquemas gráficos de fenómenos no geométricos (el diagrama de un acontecimiento, por ejemplo). En este capítulo se describe el sentido espacial, y se proponen tareas de enseñanza para desarrollarlo, tras examinar cómo aparece este sentido en los currículos escolares de Educación Primaria.

Los futuros maestros, cuando analizan el aprendizaje de la geometría que han realizado durante su formación escolar, aprecian que predominan conocimientos sobre términos, relaciones, propiedades y clasificaciones de figuras. Parece que la enseñanza de la geometría que recibieron estuvo orientada a memorizar definiciones y a aplicarlas para clasificar cuerpos y figuras, con amplia presencia de medidas de algunas magnitudes. La mayoría de las tareas, en estos casos, parecieran limitarse a la aplicación de fórmulas. Un ejemplo de tarea en esta dirección se muestra en la figura 6.1.

Sin embargo, tal como se ha dicho, la geometría va más allá de esta perspectiva, ya que es necesaria para situarse y orientarse en el espacio. Para ello, además de conocer y manejar los elementos geométricos, hay que desarrollar una serie de habilidades que ayudan a resolver problemas espaciales. Esta idea subyace en el concepto de sentido espacial.

Describimos el **sentido espacial** como un *modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y su representaciones, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, in-*

© Ediciones Pirámide



Clasifica los cuadriláteros adjuntos, formados con segmentos de igual longitud. Sabiendo que la longitud del segmento es de 5 cm, calcula el área y el perímetro de las dos figuras. ¿Cuál de ellos es un rombo?

Figura 6.1.—Tarea de enseñanza basada en aprendizaje de nombres y medidas.

cluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas.

El sentido espacial requiere generar una amplia red de imágenes de los conceptos geométricos, empleando herramientas formales, pero también actividades basadas en mirar y actuar sobre el espacio, como doblar papel, utilizar espejos o jugar con construcciones para obtener figuras, realizar movimientos y transformaciones, e identificar teselaciones y proyecciones, o bien manejar programas virtuales y dinámicos. Si bien se podría estudiar a partir de una interpretación amplia de los propios elementos geométricos, a efectos de clarificarlo vamos a distinguir entre los elementos geométricos y las habilidades para manejar sus representaciones e imágenes, a lo que llamaremos visualización.

ACTIVIDAD 1: Identifica situaciones cotidianas y familiares que requieren emplear elementos geométricos.

El sentido espacial destaca que el aprendizaje de objetos geométricos tiene que acompañarse con el descubrimiento y práctica de destrezas que permiten ubicarlos en el espacio, percibirlos y representarlos de diversas formas. Es por esto que vamos a distinguir dos componentes del sentido espacial:1) el *manejo de conceptos geométricos,* y 2) las *destrezas para visualizar* estos conceptos.

1.1. Manejo de conceptos geométricos

Cuando hablamos de *manejo de conceptos geométricos* estamos haciendo referencia al conocimiento de las características y propiedades de las formas geométricas en el plano o en el espacio, como por ejemplo reconocer el *cuadrado,* identificar *propiedades,* como que los cuatro ángulos son rectos y sus lados son iguales, establecer *relaciones,* como las de paralelismo entre sus lados, o identificar qué figuras resultan al colocar un cuadrado frente a un espejo *(movimientos),* apreciando dónde se sitúa la imagen reflejada *(ubicación)* y cómo se obtiene el mismo cuadrado si se coloca el espejo ocupando su diagonal *(regularidades).* Para examinar el manejo de conceptos con más detalle, distinguimos tres apartados en esta componente: *a*) propiedades de las formas y de las figuras; *b*) relaciones geométricas, y *c*) ubicación y mo-

© Ediciones Pirámide

vimiento. Identificamos los puntos clave de cada uno de los apartados, que se tratan en los cursos escolares.

a) Conocer *propiedades de formas y figuras.* Incluye identificarlas a través del nombre, la definición y diversas representaciones, definirlas, construirlas, caracterizarlas, identificar y proponer contraejemplos, etc. Por ejemplo, identificar diversas caracterizaciones del cuadrado (cuadrilátero regular, cuadrilátero con lados iguales y ángulos rectos, cuadrilátero de diagonales iguales perpendiculares, que se cortan en su punto medio, etc.).

b) Reconocer y establecer *relaciones geométricas.* Consiste en apreciar cualidades en las formas y cuerpos geométricos, como la congruencia, simetría, igualdad o equivalencia, características que permiten clasificarlas y diferenciarlas, etc. Por ejemplo, identificar la igualdad de longitud entre los lados opuestos de los paralelogramos, o la de amplitud entre sus ángulos opuestos.

c) La *ubicación* y los *movimientos* son elementos dinámicos de la geometría. Manejar estos conceptos consiste en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio, conocer y saber llevar a cabo los movimientos, así como detectar regularidades o los elementos que resultarían invariantes al moverlos. Por ejemplo, identificar los movimientos que se han realizado en una figura para producir un friso, o identificar cuál es la menor figura que lo genera.

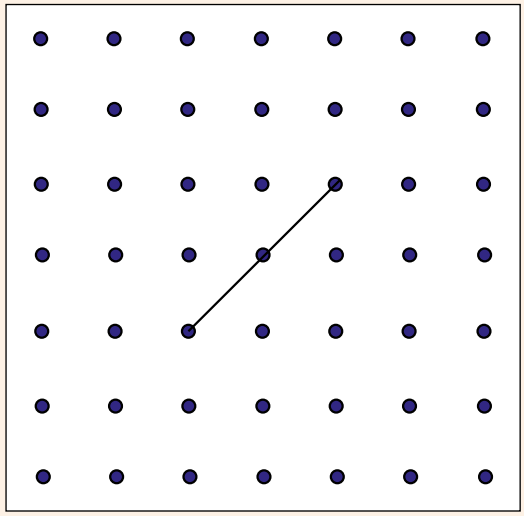
Un adecuado conocimiento de esas propiedades, relaciones y transformaciones geométricas permite realizar razonamientos matemáticos sobre la figura del cuadrado, como por ejemplo identificar que su centro es a la vez el punto de corte de sus diagonales, el punto de intersección de las mediatrices de sus lados, el centro de giro que lo deja invariante, etc. Ahora bien, para establecer estos razonamientos necesitamos que las imágenes creadas del cuadrado sean dinámicas, versátiles e identificables aunque no dispongamos de toda la figura, sino sólo de algunos vértices u otros elementos gráficos, o bien de algunas de sus características que permitan identificar dónde se encuentran los demás y cómo están situados.

ACTIVIDAD 2: Caracteriza el triángulo equilátero de diversas formas, tanto por sus propiedades geométricas como por sus regularidades (simetrías, giros, etc.).

ACTIVIDAD 3: Resuelve la siguiente tarea: *A partir del segmento dibujado en el geoplano, construye:*

a) Un cuadrado que tenga por lado el segmento dado.

b) Un cuadrado que tenga por diagonal el segmento dado.



© Ediciones Pirámide

1.2. Destrezas de visualización

El sentido espacial requiere, además, *destrezas para visualizar los elementos geométricos en el espacio,* y abarca especialmente la orientación y la visualización. Los alumnos deben localizar y descubrir relaciones espaciales en los elementos que componen su entorno.

a) *Orientación:* La orientación espacial es la destreza para comprender cómo están dispuestos los elementos en el espacio, y recordarlos sin confusión adoptando diferentes perspectivas.

Localizar los distintos elementos de un mapa o recordar el camino de vuelta al aparcamiento es algo popularmente asociado a tener «un buen sentido de la orientación», pues requiere haber creado una representación mental de los elementos que permita identificarlos cuando se cambien las condiciones, como al acceder al aparcamiento por diferentes lugares, o identificarlo tanto al ir como al volver.

ACTIVIDAD 4: Observa el plano del metro y busca las estaciones de Moncloa (línea 3) y de Ventas (línea 2).

a) ¿Cómo irías de una estación a otra? (Da al menos dos opciones).
b) Según los caminos que has elegido, ¿por cuántas paradas pasas en cada caso?, ¿cuántos transbordos haces en cada caso?
c) Independientemente de los caminos elegidos en los apartados anteriores, ¿cuál es el camino más corto para ir de una estación a otra? En este caso, ¿cuántos transbordos haces?

© Ediciones Pirámide

b) *Visualización:* De modo general, entendemos que la capacidad visual en geometría consiste en un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras, objetos y modelos geométricos.

Para visualizar hay que crear y disponer de un buen repertorio de representaciones e imágenes gráficas de las formas, cuerpos y figuras geométricas, ser diestro para generar información sobre ellas y utilizarlas para resolver problemas prácticos.

Se requiere capacidad de visualización para percibir un cuerpo o una figura cuando se dispone de diferentes informaciones sobre ellos, como la descripción verbal *(cuadrilátero equilátero y rectángulo),* o de alguna representación icónica, como la representación plana de objetos tridimensionales, sus proyecciones, desarrollos planos, etc. Por ejemplo, se requiere capacidad de visualización para identificar diversos cuadrados en un geoplano, independientemente de que los lados sean paralelos a los bordes. También para poder imaginar un cubo a partir de su desarrollo en el plano y manipular mentalmente la imagen para localizar las caras contiguas (figura 6.2).

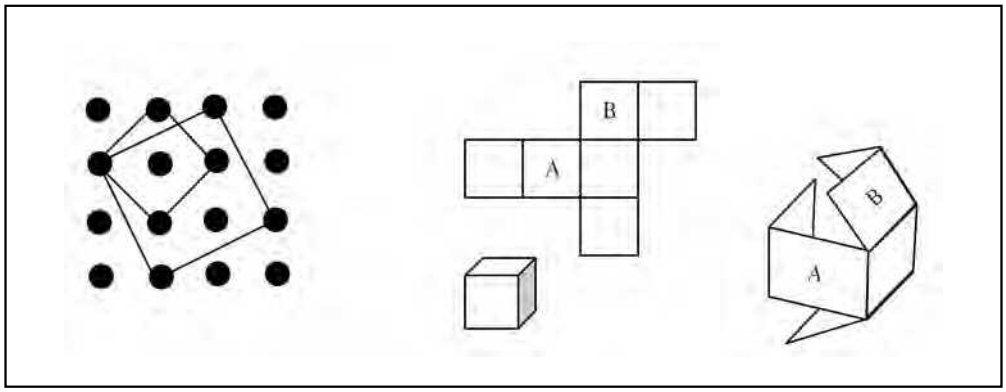


Figura 6.2.—Identificar cuadrados en un geoplano. Imaginar qué caras serán contiguas en el cubo, a partir del desarrollo plano.

Para generar estas habilidades necesitamos realizar diversas experiencias manipulativas con los conceptos geométricos, como manejar el geoplano y el papel cuadriculado para formar diversos cuadrados con vértices en los puntos, o componer cuerpos y objetos a partir de recortables. La enseñanza tiene que favorecer que los alumnos desarrollen estas habilidades para poder razonar con imágenes y resolver problemas.

ACTIVIDAD 5: Plantea situaciones similares a las de la figura 6.2, para identificar un triángulo equilátero en diversas situaciones, tanto planas como en el espacio.

1.3. Conexión entre las componentes del sentido espacial

Las componentes del sentido espacial que hemos destacado no pueden entenderse de un

© Ediciones Pirámide

modo aislado. Si consideramos en un plano inferior los elementos que componen los conceptos geométricos formales y no se establecen relaciones entre ellos, estaríamos hablando de un nivel muy pobre de sentido espacial. La fortaleza del sentido espacial radica justamente en establecer conexiones entre estas componentes (figura 6.3a).

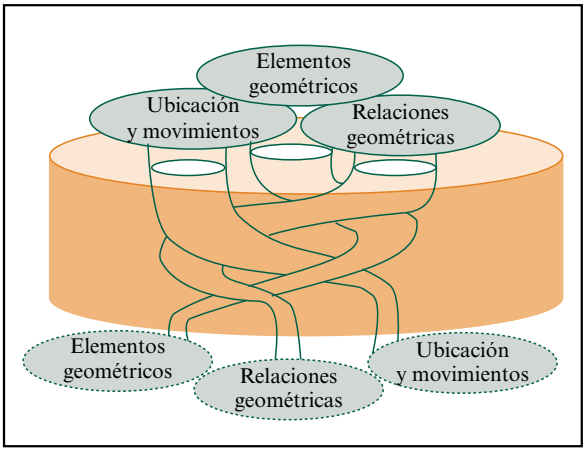


Figura 6.3a.—Conexión entre los conceptos geométricos.

Esta conexión de los elementos se consigue al ir incorporando las destrezas de visualización, fortaleciéndose a su vez las componentes anteriores. En la parte superior del esquema aparecen esos conceptos relacionados, enriquecidos con una gran carga de interpretación visual.

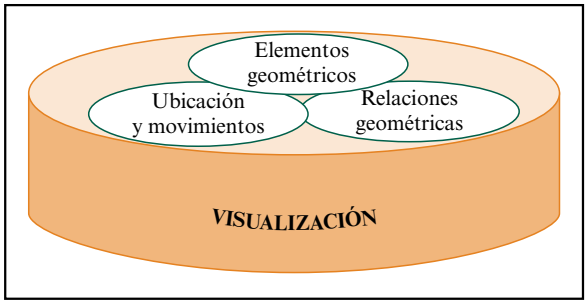


Figura 6.3b.—Esquema de las componentes del sentido espacial.

En la tabla 6.1 mostramos ejemplos de puntos clave que se deben considerar en las componentes para desarrollar el sentido espacial en los escolares.

TABLA 6.1

Puntos clave al desarrollar el sentido espacial en clase, para cada concepto geométrico

Propiedades de formas	Relaciones geométricas	Ubicación y movimientos
• Las formas bidimensionales y las figuras tridimensionales tienen propiedades que permiten su identificación, ordenación y clasificación. • Los ángulos son medidas de un giro, y se pueden clasificar según su grado de rotación. • La comprensión de los polígonos y sus propiedades permite a los estudiantes explorar e investigar conceptos de geometría y medida.	• Las formas planas y los cuerpos sólidos pueden estar compuestos, o descomponerse en otras formas de dos dimensiones o figuras tridimensionales. • Existen relaciones entre la geometría plana y la sólida (por ejemplo, las caras del poliedro son polígonos; las vistas de un cuerpo geométrico se pueden representar en dos dimensiones).	• El sistema de coordenadas es un marco sistemático para describir la posición en el plano, y ubicar formas planas u objetos sólidos. • Las transformaciones describen movimientos, como cuando se identifica un friso a partir de un giro y una traslación.

© Ediciones Pirámide

TABLA 6.1 *(continuación)*

Propiedades de formas	Relaciones geométricas	Ubicación y movimientos
• La comprensión de los poliedros y sus propiedades ayuda a comprender el mundo sólido en que vivimos, y a establecer conexiones entre la geometría de dos y tres dimensiones.	• La congruencia es una relación espacial entre dos formas o figuras geométricas que tienen exactamente el mismo tamaño y forma.	• Las figuras presentan regularidades que resultan invariantes al realizar movimientos. Por ejemplo, identificar que el cuadrado es simétrico respecto a sus diagonales permite ubicar los vértices del cuadrado tras aplicarle un giro.

A su vez, el manejo de conceptos geométricos contribuye a mejorar la visualización, por lo que las dos componentes se complementan para lograr un dominio geométrico funcional, es decir, que facilite la ubicación en el espacio y el reconocimiento de relaciones espaciales y geométricas.

2. TAREAS PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ESPACIAL

Vamos a ilustrar las componentes del sentido espacial, y la conexión entre conceptos y capacidades, mostrando ejemplos de tareas geométricas que contribuyen a su desarrollo y aprendizaje.

2.1. Aprendizaje de las simetrías mediante espejos

En primer lugar examinaremos el Juego del espejo. Este juego consta de dos cubos, un espejo y una serie de tarjetas con dibujos. En las caras de los cubos hay formas geométricas rectilíneas y sombreadas de negro. Seleccionando las caras y colocándolos convenientemente, hay que formar el dibujo de una de las tarjetas, entre las dos caras y sus reflejos en el espejo (figura 6.4).

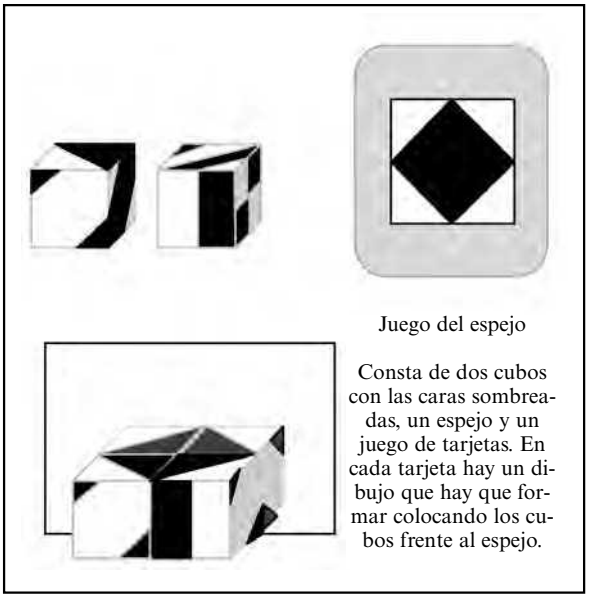


Figura 6.4—Juego del espejo.

La estrategia inicial consiste en probar hasta que aparezca el dibujo propuesto. El jugador hábil, antes de colocar las piezas, examina las propiedades del dibujo de la tarjeta y selecciona las caras adecuadas. Para ello reconoce conceptos geométricos del dibujo y busca en él figuras

© Ediciones Pirámide

de las caras de los cubos. Será más eficaz si identifica y utiliza conceptos geométricos, como los ángulos y longitudes, o relaciones, como paralelismo y perpendicularidad. Identifica un eje de simetría en el dibujo y lo relaciona con el espejo. En este proceso refuerza el manejo de conceptos geométricos, de propiedades, relaciones, movimientos y regularidades. El proceso es más eficaz si identifica la parte del dibujo que se repite por simetría. Veamos cómo aplica los conceptos geométricos y las destrezas de visualización para formar el dibujo de la tarjeta de la figura 6.4.

1.º Percibe el dibujo completo y lo descompone, identificando sobre él figuras de las caras *(percibir figuras en contexto)*. Identifica en la figura 6.5 *a* un triángulo rectángulo isósceles negro, como medio cuadrado.
2.º Busca en los cubos y separa caras que pueden generar la mitad del dibujo. En la figura 6.5 *b*, busca triángulos rectángulos isósceles. Luego reconoce algunas relaciones (segmentos paralelos o perpendiculares). Identifica algunas propiedades de los triángulos, los ángulos, etc. En el proceso maneja conceptos y aplica la habilidad para *reconocer relaciones espaciales.*
3.º Discrimina visualmente las caras de los cubos que va a utilizar, empleando diferentes criterios: número y posición de las líneas, tipos de ángulos, regiones en las que queda dividida, etc. Ello le lleva a identificar las caras que va a emplear (figura 6.5 *c*).
4.º Ensaya posiciones frente al espejo. Conforme encuentra similitudes o diferencias, imagina qué posición es más adecuada. Para anticipar la imagen que resultará, tiene que *conservar la percepción.* Esto le llevará a aceptar su solución o a girar la tarjeta, usando un conocimiento de las propiedades de aplicar un giro (figura 6.5 *d*).

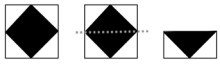
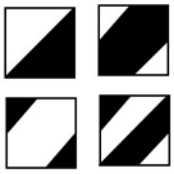
	Habilidades	Conceptos geométricos y movimientos
a 	Figura-Contexto	Ejes de simetría. Triángulos rectángulos isósceles. Cuadrados.
b 	Relaciones espaciales	Segmentos paralelos o perpendiculares. Medidas de ángulos. Figuras simétricas.

Figura 6.5 *a* y 6.5 *b*—Sentido espacial al construir la figura en el juego del espejo.

	Habilidades	Conceptos geométricos y movimientos
c	Discriminación visual	Número y posición de las líneas. Tipos de triángulos. Número y forma de las regiones. Diagonal de un cuadrado.
d	Conservación de la percepción	Áreas de las partes. Giro respecto a un punto. Traslación.

Figura 6.5 *c* y 6.5 *d.*

5.º Para orientar la cara del cubo respecto al espejo, identifica el espejo como un referente que facilita identificar la *posición en el espacio* (figura 6.5 *e*). Podrá anticipar esta colocación si reconoce relaciones espaciales, regularidades en los movimientos, apreciando que el dibujo es simétrico.

© Ediciones Pirámide

Finalmente necesita cierta habilidad con las manos, siguiendo las indicaciones que le da su percepción visual *(coordinación ojo - motor)* para colocar los cubos frente al espejo en la posición que ha pensado (figura 6.5 *f*). El proceso de resolución resulta más rápido si tiene *memoria visual,* que le hace recordar el dibujo sin necesidad de mirarlo durante la resolución.

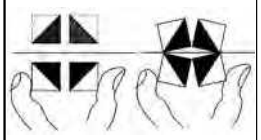
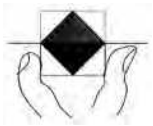
	Habilidades	**Conceptos geométricos y movimientos**
e 	Ojo motor	Giro, simetría y traslación.
f 	Ojo motor Memoria visual	
Todo el proceso	Memoria visual	Propiedades geométricas del dibujo.

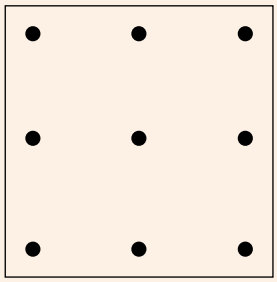
Figura 6.5 *e* y 6.5 *f.*

El juego del espejo da ocasión a los estudiantes para plantearse nuevos retos: estudiar si son necesarias todos las figuras de las caras o se pueden obtener unas a partir de otras; buscar nuevos dibujos más complejos, o determinar qué dibujos podrían formarse empleando una sola pieza cúbica y dos espejos, formando un libro de espejos ortogonal (composición de movimientos). Pueden llegar a buscar estrategias generales o buscar modelos geométricos más complejos.

2.2. Geoplanos y sentido espacial

También ayuda a desarrollar el sentido espacial jugar a juegos similares a éste, que requieran emplear y poner en práctica el conocimiento de conceptos geométricos que se corresponden con objetos reales, empleando diversos sentidos (vista, tacto y oído) para reconocer, construir, posicionar, interpretar y expresar. Si, además, plantean retos que permiten apreciar cuándo una solución es válida, facilitará que el jugador refuerce estrategias favorables, conectando diversas componentes del sentido espacial.

ACTIVIDAD 1: Estudiar cómo se pone en juego el sentido espacial cuando se construyen todos los triángulos distintos en un geoplano de 3×3 puntos.



En las siguientes situaciones se analizan las componentes del sentido espacial y su relación con las habilidades de visualización. Cuando el alumno presenta dificultades en algunas de ellas o las manifiesta en un nivel bajo, se pueden detectar errores habituales debidos a la falta de conexión entre las componentes o a un uso incompleto de las correspondientes habilidades de visualización que dan fortaleza al sentido espacial.

Ejemplo 1

¿Es posible construir un cuadrado en un geoplano isométrico? Supongamos que un alumno responde afirmativamente a esta cuestión al observar la figura 6.6.

© Ediciones Pirámide

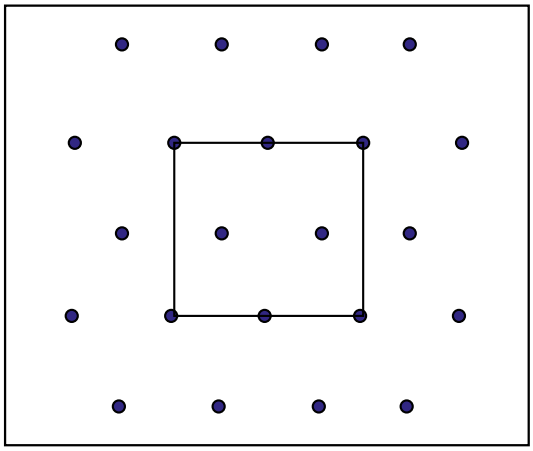


Figura 6.6.—Cuadrilátero en geoplano isométrico.

Si argumenta su respuesta diciendo que «se ve» que los lados son iguales, está manifestando un uso muy pobre de la visualización, pues únicamente está argumentando según lo que percibe, lo que no le permite *discriminar visualmente* entre las longitudes 2 y raíz cuadrada de 3 (1.732...). La componente del sentido espacial que no está manifestando correctamente es **la relación geométrica de igualdad** en la comparación de los lados. La conexión entre las habilidades de *percepción de la figura-contexto* y de la *percepción de las relaciones espaciales* le hubiera permitido identificar el triángulo equilátero AOP (figura 6.7) y razonar que la altura de este triángulo es la mitad del lado del cuadrado y, por tanto, sería igual al lado OA, por ser una trama isométrica. Esto contradice el hecho de que en un triángulo equilátero la longitud de su altura es menor que la de uno de sus lados.

ACTIVIDAD 2: Analiza las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que se ponen en juego para razonar si es posible construir un triángulo equilátero en un geoplano de trama cuadrada.

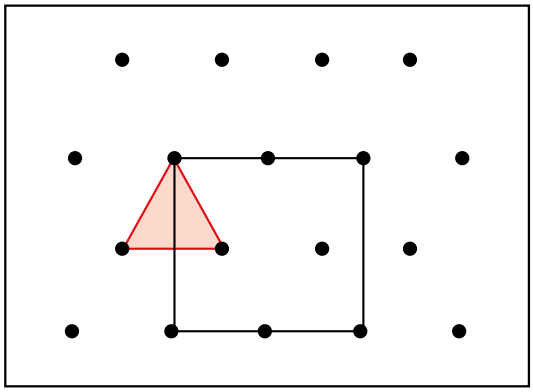


Figura 6.7.—Justificación de que no es un cuadrado.

Ejemplo 2

¿Qué tipo de cuadrilátero se muestra en la figura 6.8?

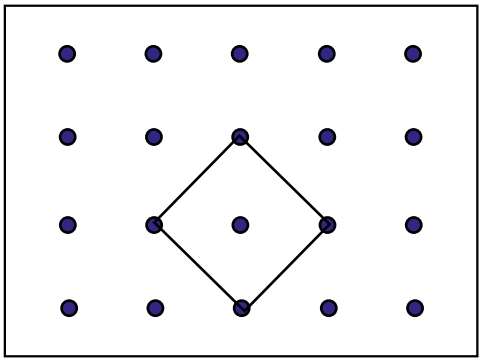


Figura 6.8.—Rombo/Cuadrado en geoplano ortogonal.

Si el alumno responde que se trata de un rombo y no de un cuadrado, está manifestando un bajo nivel de la componente de **conocer las propiedades y figuras.** La manifestación de las habilidades de *conservación de la percepción* y *percepción de la posición en el espacio* le hubiera permitido reconocer los ángulos rectos y la igualdad de los lados, al observar que la figura

© Ediciones Pirámide

es el resultado de girar 45° la imagen habitual del cuadrado apoyado sobre uno de sus lados. Si a pesar de reconocer los ángulos rectos y la igualdad de los lados sigue sin identificar el cuadrado, por la posición en la que está situado, muestra un conocimiento insuficiente de la caracterización del cuadrado, al no identificarlo como caso particular de rombo o al suponer que la propiedad de ser un cuadrado depende de la posición en que se le presente el cuadrilátero.

ACTIVIDAD 3: Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, analizando las componentes del sentido espacial y las habilidades que se manifiestan:

a) Un rectángulo con tres de sus lados iguales es un cuadrado.
b) Un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo.
c) Un paralelogramo con tres de sus lados iguales es un rombo.
d) Un trapecio con dos lados iguales es un paralelogramo.

2.3. Transformaciones de figuras geométricas

Ejemplo 3

Observa la figura 6.9. ¿Puede obtenerse la pieza B a partir de un giro en el plano de la pieza A?

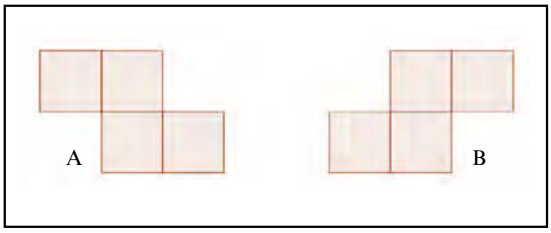


Figura 6.9.—Giros en el plano.

Si la respuesta es afirmativa, el alumno manifiesta un nivel bajo en la componente de **ubicación y movimientos**. La discriminación visual le hubiera permitido reconocer las diferencias entre las dos piezas, independientemente de su posición, y percibiría las relaciones espaciales entre los elementos de la pieza para ver que los cuadrados que la componen no están situados en la misma disposición, percibiendo la posición que ocupan en el plano cuando una de ellas se gira. Una utilización inadecuada de los movimientos en el plano puede inducir el error de considerar la simetría axial existente entre las dos piezas como un giro en el espacio tridimensional.

ACTIVIDAD 4: Construye todas las piezas que pueden obtenerse al unir cuatro cuadrados, de manera que dos de ellos coincidan en un lado (tetraminós). Identifica cuáles pueden obtenerse unos a partir de otros mediante movimientos en el plano. Analiza las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización puestas en juego.

En las actividades anteriores hemos resaltado una de las componentes del sentido espacial que intervienen en el proceso de resolución, pero, en general, es necesario poner en juego la conexión entre las tres componentes.

Ejemplo 4

Señala en el desarrollo plano el camino que hay representado en el cubo de la figura 6.10.

En relación a *conocer las propiedades de formas y figuras,* el alumno debe identificar las dos representaciones del cubo presentadas, así como conocer sus propiedades. Por ejemplo, reconocer los cuadrados como caras del cubo y detectar los ángulos rectos a pesar de la presentación en perspectiva.

© Ediciones Pirámide

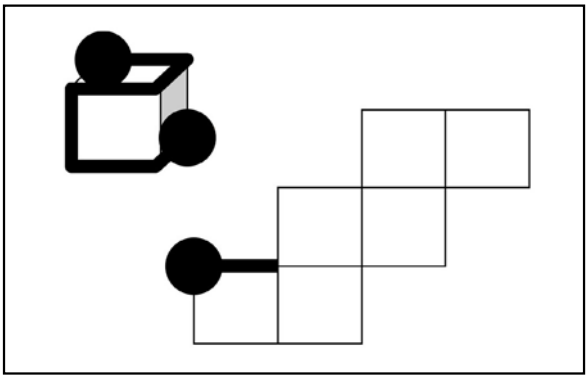


Figura 6.10.—Camino en un cubo.

En cuanto a las *relaciones geométricas,* debe identificar la igualdad en la longitud de los lados, así como la posición relativa entre las aristas. Por ejemplo, puede identificar qué partes del camino son lados paralelos, perpendiculares, contiguos, etc.

En relación a *la ubicación y los movimientos,* es necesario que utilice referentes para situar en el desarrollo plano los distintos elementos espaciales, además de identificar los movimientos para conseguir formar el cubo a partir del desarrollo plano o viceversa. Por ejemplo, puede nombrar las caras con letras orientadas (arriba, derecha, izquierda...) e identificarlas en la posición correspondiente en el desarrollo plano. Imaginando que dobla aristas para formar el cubo, puede localizar todos los vértices de los cuadrados en el desarrollo que se corresponden con el mismo punto en el cubo.

Es claro que estas tres componentes están estrechamente relacionadas al ponerse en juego las habilidades de visualización. El alumno coordina su visión con el movimiento de la mano para trazar el camino. Percibe las figuras dentro del contexto, identificando las aristas de los cuadrados y los vértices correspondientes. Puede utilizar sistemas de referencia que le permitan ubicarse en el espacio en relación con el cubo, localizando la cara superior como el cuadrado de partida en el desarrollo plano, y orientando el camino según las trayectorias se desvíen hacia la izquierda o la derecha. En cuanto a la conservación de la percepción, es capaz de razonar en las caras no visibles en la representación tridimensional, siendo consciente de qué propiedades, como el paralelismo o la perpendicularidad, se mantienen al realizar movimientos en el cubo. Reconoce relaciones espaciales entre los segmentos del camino, así como las longitudes de los mismos y los ángulos que determinan. En las diferentes posibilidades de doblado del desarrollo plano o en los distintos giros del cubo es capaz de discriminar visualmente que los cubos obtenidos son los mismos. En todo este proceso es necesaria la memoria visual para procesar la información mental y trasladarla a la resolución de la tarea.

2.4. Importancia de las imágenes para el aprendizaje de la geometría

Para facilitar la conexión e integración entre las componentes del sentido espacial, el proceso de enseñanza de la geometría debe promover en los alumnos una comprensión de los conceptos que no se limite a memorizar su definición. En la propuesta didáctica que se hace en este libro, una figura geométrica puede ser descrita mediante sus propiedades, pero no puede reducirse a ellas. En geometría escolar la representación gráfica es permanente. El razonamiento geométrico utiliza las imágenes de los conceptos, que reflejan sus propiedades, como la forma, la posición y el tamaño, pero también las cualidades ligadas a su definición. Los conceptos geométricos constan de imagen y definición que los dota de una doble naturaleza.

Al contemplar diversos objetos de forma cuadrada, como el enlosado de una habitación,

© Ediciones Pirámide

una reja, etc., creamos representaciones del cuadrado. También se generan imágenes del cuadrado al leer o escuchar una descripción de sus propiedades espaciales. Por tanto, en la creación de imágenes confluyen tanto la información percibida a través de los sentidos como la que se obtiene a través de la definición. La identificación visual del cuadrado en un enlosado se puede completar con otras percepciones, como la obtenida al palpar un cubo y apreciar la igualdad de sus ángulos en cada cara. El escolar puede completar así la imagen espacial que había construido a través de la definición de cuadrado *(polígono regular con sus cuatro lados y ángulos iguales)* o el estudio de algunas de sus propiedades (lados paralelos dos a dos, diagonales iguales, perpendiculares que se cortan en su punto medio, simétrico respecto a las diagonales y las mediatrices de sus lados, etc.).

Al construir un cuadrado con cuatro piezas de un mecano se relaciona la imagen del cuadrado con la figura construida (figura 6.11). Ajustando los lados se logra que los ángulos «parezcan» rectos. Pero el cuadrilátero de mecano se deforma, dando lugar a figuras que no son cuadradas, por lo que hay que recurrir a propiedades formales del cuadrado para evitar la deformación. Por ejemplo, podemos obligar a que las dos diagonales sean iguales colocando cuerdas entre los vértices. Coordinar definiciones con las cualidades de las imágenes colabora a desarrollar el sentido espacial.

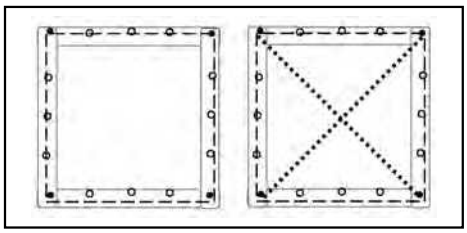


Figura 6.11.—Imagen de un cuadrado construido en mecano.

También al construir un cuadrado con Geogebra se parte de la imagen inicial, empleando la instrucción de construir un polígono de cuatro lados y cuidando, con el cursor, que los cuatro lados sean iguales y que los ángulos parezcan rectos (figura 6.12 *a*). Cuando observamos que la figura se deforma al desplazar el cursor, se ve la necesidad de emplear alguna característica que obligue al polígono construido a ser un cuadrado, como utilizar la instrucción de ser un polígono regular (figura 6.12 *b*); o partir de segmentos perpendiculares de igual longitud, y trazarles paralelas (figura 6.12 *c*).

Apreciamos en estos ejemplos que no basta con disponer de la imagen de cuadrado (visualización). Para conocer el cuadrado necesitamos coordinar la imagen con sus características geométricas. Igualmente, no basta con definir una figura mediante sus características geométricas, pues para dominarla necesitamos coordinarlas con las imágenes correspondientes.

Además de proporcionar conocimientos geométricos, imágenes, representaciones y destrezas para desarrollar y utilizar las habilidades de visualización, un aspecto añadido a las dos componentes del sentido espacial es la predisposición a utilizarlo. El desarrollo del sentido espacial debe ir acompañado de un proceso de enseñanza que motive su uso y favorezca el interés del alumno para ponerlo en juego al resolver problemas.

En el juego del espejo se ha mostrado la disposición del resolutor a utilizar su sentido espacial para resolver un reto: obtener la figura en el espejo. El sentido espacial le permitirá resolver problemas como forrar adecuadamente un libro, localizar el mejor lugar para colocar una lámpara en una habitación, montar una estantería, etc. Pero también le ayuda a resolver problemas geométricos, como buscar el punto medio de un paralelogramo o identificar los ángulos de igual amplitud de un trapecio isósceles.

© Ediciones Pirámide

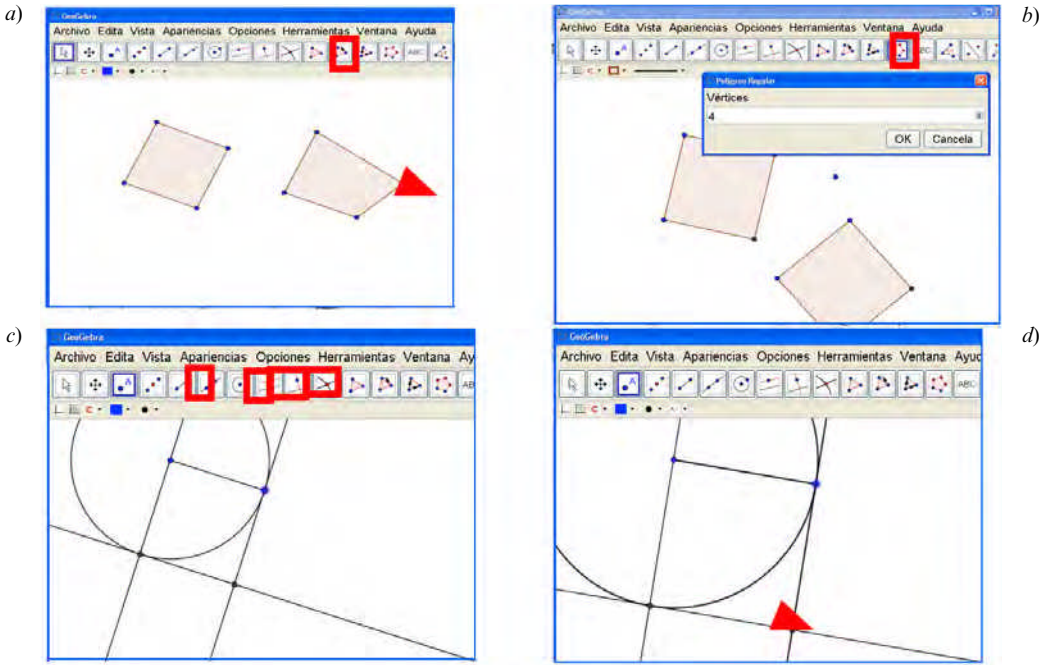


Figura 6.12.—Cuadrado con Geogebra.

ACTIVIDAD 5: Identifica tres situaciones familiares que necesiten sentido espacial para su resolución, como es el caso de colgar un cuadro en la pared con dos clavos, para que el cuadro quede paralelo al suelo.

3. EL SENTIDO ESPACIAL EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA

Al considerar en la enseñanza de la geometría el desarrollo del sentido espacial de los alumnos se está dando prioridad a resolver problemas del entorno, especialmente aquellos que provienen del espacio circundante. El contenido geométrico es un medio para afrontar los problemas espaciales, más que un fin en sí mismo, cuyos conceptos interesan para resolver problemas y para crear hábitos utilizables en situaciones más amplias.

Ello lleva a examinar qué hechos y relaciones geométricas interesa estudiar para llevar a cabo clasificaciones diversas. También a analizar qué características son más eficaces para resolver problemas geométricos de la realidad, al estudiarlos en tareas con una intención determinada, tal como se ha expuesto en el apartado anterior.

ACTIVIDAD 1: Busca una descripción más precisa de los enfoques del currículo (por ejemplo, en el capítulo 1 del libro Matemáticas para maestros de Educación Primaria, de Segovia y Rico, 2011), y relaciónala con las tareas de los ejemplos anteriores.

© Ediciones Pirámide

Los currículos actuales de geometría para la Educación obligatoria provienen de un debate que tuvo lugar en la Comisión Internacional para la Educación Matemática (ICME, 1995), del que derivó un documento con las orientaciones para la geometría en el siglo XXI. Sus directrices se ven reflejadas en los currículos innovadores posteriores. Fue esta propuesta la que comenzó a emplear el término «sentido espacial», entendido como una percepción intuitiva del entorno y de los objetos que hay en él. Estableció cuatro capacidades para desarrollar mediante la enseñanza de la geometría. Tres de ellas (analizar figuras y formas geométricas; aplicar transformaciones, y ubicar y orientar) están relacionadas con el aprendizaje de conceptos de geometría, mientras que la otra (visualizar) promueve destrezas para relacionarse con el medio.

El currículo español indica que un objetivo de la enseñanza de la matemática es lograr que los alumnos se orienten en el espacio, y que utilicen formas geométricas para describir la realidad. Además, los contenidos de geometría se organizan en tres apartados: situación en el espacio (que corresponde a la orientación, según las componentes del sentido espacial), formas planas y espaciales, y regularidades y movimientos (relacionados directamente con los conceptos geométricos y movimientos, componentes del sentido espacial).

En los currículos actuales apreciamos que se enfatiza la necesidad de que el aprendizaje geométrico se realice por medio de la resolución de problemas, tanto como una intención final de su aprendizaje (concepción funcional del currículo) como empleando los problemas como recursos metodológicos para su enseñanza y aprendizaje.

También se observa un reconocimiento explícito de la doble naturaleza de los conceptos geométricos, destacando la importancia de que los alumnos desarrollen las habilidades visualizadoras empleando las formas geométricas como intermediarios, pero a su vez percibiendo la importancia de que las formas se construyan atendiendo a esa doble naturaleza. A tal fin se cita explícitamente la visualización como una finalidad del aprendizaje matemático.

En los currículos se sugieren gran cantidad y variedad de acciones para lograr el aprendizaje geométrico, incluyendo la identificación de formas y cuerpos en el entorno, el dibujo y la construcción, su clasificación libre, la caracterización y la medida. Especialmente importante es el papel que se aprecia en la geometría para desarrollar capacidades comunicativas y de argumentación.

ACTIVIDAD 2: Identifica apartados del currículo de matemáticas de Primaria respecto a la geometría, que aludan a alguna de las componentes del sentido espacial.

En resumen, el currículo del bloque de geometría tiene una orientación funcional, centrada en desarrollar el sentido espacial de los alumnos. Estas intenciones se aprecian especialmente cuando se detalla la contribución de la enseñanza de la geometría al desarrollo de las competencias básicas. Por una parte se realza la relación con la competencia centrada en el conocimiento y del mundo físico, al hacer posible una mejor comprensión y descripción más ajustada del entorno, mediante la manipulación mental de figuras y formas, muy importante para el empleo de mapas, diseño de planos, dibujo, etc. También destaca su contribución a la competencia expresión cultural y artística, facilitando el análisis de determinadas producciones artísticas, mediante el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas.

© Ediciones Pirámide

4. ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ESPACIAL EN PRIMARIA

Conocidas las diferentes componentes del sentido espacial, establecemos unas pautas generales para que el proceso de enseñanza favorezca su desarrollo.

Señalamos una serie de normas generales que permiten al maestro adaptarlas tanto al contenido geométrico que quiera enseñar como a las necesidades del alumnado y del aula.

Comenzamos con el juego libre, preferentemente con material manipulativo y en situaciones concretas, que incluyan actividades motrices. Progresivamente iremos avanzando en tres direcciones, que hacen más abstractas las tareas:

a) Del juego libre al juego simbólico y de razonamiento, pasando por el juego con reglas, incluyendo la resolución de retos.
b) Del uso del material manipulativo al razonamiento verbal, pasando por manipular, identificar, recortar, construir y dibujar y representar figuras y formas.
c) Del juego motriz al razonamiento abstracto, usando representaciones cada vez más abstractas y simbólicas, detectando y formulando relaciones y definiciones.

Estas pautas permiten enunciar algunas recomendaciones que se basan en cada una de ellas o en su combinación, como son las siguientes.

1. Crear imágenes visuales, mediante *juego libre de creación* y *juego para resolver retos.* El juego de creación favorece que el niño perciba diversas imágenes de un mismo objeto, genere nuevas imágenes, coordine entre sí las partes de los objetos y perciba cómo se coordinan las partes que forman los cuerpos geométricos. El proceso gradual comienza con la creación para llegar a utilizar las estrategias aprendidas para resolver retos. La *creación* puede abarcar *juegos de construcción,* como arquitecturas (para apreciar qué figuras pueden sustentar a otras, por ejemplo haciendo «castillos» simétricos), *mosaicos libres* (figura 6.13 *a*, para apreciar qué figuras se complementan y qué efectos estéticos generan) o *recortado y pegado de papel* (para inventar formas, realizar figuras más complejas), etc. La *resolución de retos* lleva a construir a partir de *modelos dados* (figura 6.13 *b*), *completar siluetas con el Tangram* o *mosaicos* con puzles, o *cortar y pegar figuras recortables,* llegando a *crear figuras geométricas* mediante materiales específicos (mecano, geoplano, regla y compás), tanto en proceso de creación como para copiar modelos.

a) *b*)

Figura 6.13.—Juego libre y juego con retos, para hacer mosaicos.

2. *Incorporar progresivamente los nombres de las figuras y los cuerpos,* buscando identificar imágenes y categorías del mismo cuerpo, siempre desde las figu-

© Ediciones Pirámide

ras más simples (cuadrados, rectángulos) a las más generales (cuadrilátero, triángulo, polígono); dar *funcionalidad* a esta nominación a través del *relato* o las descripciones; *elaborar instrucciones* para otro, para su construcción o identificación; *juegos de definición* de conceptos sin utilizar palabras *«tabú»* (definir «cuadrado» sin utilizar las palabras *lado, cuatro, ángulo, iguales*), etc. En estas tareas se van creando imágenes espaciales y se relacionan con las visuales.

3. Promover la *representación* de figuras por medio de tareas de *creación artística,* reflejando imágenes tridimensionales o planas, para coordinar la imagen con la representación plana, captando diferencias entre ambas. Estimular el *dibujo,* incorporando estrategias para ganar precisión y habilidad, a través de juegos tipo *«pictionary»,* o contrastando la imagen que el niño representa con la que interpreta su compañero. *Describir verbalmente representaciones y dibujos* obliga a identificar relaciones geométricas y emplearlas en el mensaje.
4. Percibir las *regularidades* por medio de espejos (comenzando con espejos en los que el niño se vea completo) y su representación por medio del *dibujo* (libre al principio) lleva a percibir situaciones de simetría. Retos como el *«juego del espejo»* descrito en este capítulo contribuyen a desarrollar destrezas para familiarizarse con la simetría. Averiguar *dónde situar el espejo* para obtener imágenes plantea retos divertidos, a la vez que estimulantes, para crear imágenes de regularidad basada en la simetría axial. Materiales manipulativos (modelos en cartón de polígonos, y luego geoplano, mecano, etc.) permiten estudiar regularidades de polígonos, mediante plegado, pudiendo comprobarlas con ayuda del espejo.
5. Obtener la resultante de aplicar un movimiento a una figura, iniciándose mediante juegos como el *«Mira»* o *el papel doblado* y su comprobación con el *espejo.* Al verbalizar y representar mediante dibujos se puede ganar formalización de los movimientos.
6. Iniciar en los *mosaicos* mediante el juego libre, posteriormente *buscar baldosas* que permitan *enlosar* un suelo, identificar *teselas* en casos sencillos y buscar *propiedades* necesarias en las figuras que forman mosaicos.
7. Comenzar la *orientación* a partir de *juegos psicomotrices,* como situar a los alumnos en *corro* para *pasar la pelota* a los compañeros señalando su posición (dos a la izquierda, tres a la derecha, etc.). Promover que perciban su posición en el espacio y la posición relativa respecto a los demás. Dar órdenes sobre a qué compañero pasar la pelota, mediante mensajes verbales (aludiendo a posición, a horas del reloj, etc.). Posteriormente, utilizar figuras en juegos de orientación en el aula, como la *búsqueda del tesoro,* que requiere interpretar planos sencillos, o a través de *juegos con planos,* para obtener el camino más corto para salir del *laberinto,* hasta elaborar sus propios planos. Juegos para *identificar la posición* de un objeto, *repetir un itinerario* dado de forma simbólica (verbal, direcciones por flechas). La *identificación de los puntos cardinales* en relación al colegio, a la clase y a la ciudad y sus grandes arterias urbanas suministran un mayor conjunto de experiencias para desarrollar habilidades de orientación. Incluir experiencias de *expresar una di-*

© Ediciones Pirámide

rección verbalmente obliga a emplear elementos geométricos (línea a seguir, ángulos de las trayectorias o formas de las figuras que sirven de «hitos»).

En general, el proceso propuesto arranca del juego libre y plantea retos, con objeto de crear imágenes de los elementos geométricos. Posteriormente promueve la identificación de elementos, su caracterización, representación mediante diversos elementos, desde los concretos (mecano, pajitas, etc.) e icónicos (geoplano, dibujo a mano alzada, dibujo con regla y compás, geogebra con dibujo libre) hasta su simbolización parcial (geogebra con las instrucciones adecuadas, caracterización verbal, etc.). Se trata por tanto de buscar situaciones en las que se use la geometría. Se puede enfocar a la creación y la elaboración de un *mural* para algún acontecimiento o hacer una *exposición* sobre las actividades realizadas. Los juegos de reto se pueden reforzar si se afronta su estudio para *seleccionar juegos para unas jornadas matemáticas,* encontrar un tesoro, compartir con compañeros una descripción de las instalaciones del colegio o su ubicación en la ciudad, por ejemplo. Estas situaciones favorecen el empleo de elementos geométricos y obligan a fijar sus características, apreciar las relaciones espaciales que se quieren representar o transmitir, y emplearlos de manera verbal, para compartirlos. A partir de estas pautas y funciones se puede razonar sobre los conceptos y relaciones geométricas elementales formales, buscando consecuencias de sus definiciones, sus propiedades y formas de caracterizarlas. El esquema de la figura 6.14 resume las apreciaciones anteriores.

ACTIVIDAD 1: Haz una lista de juegos que emplean elementos geométricos, identifica qué aspectos del sentido espacial se utilizan, y con ello haz una base de datos de juegos que desarrollan el sentido espacial.

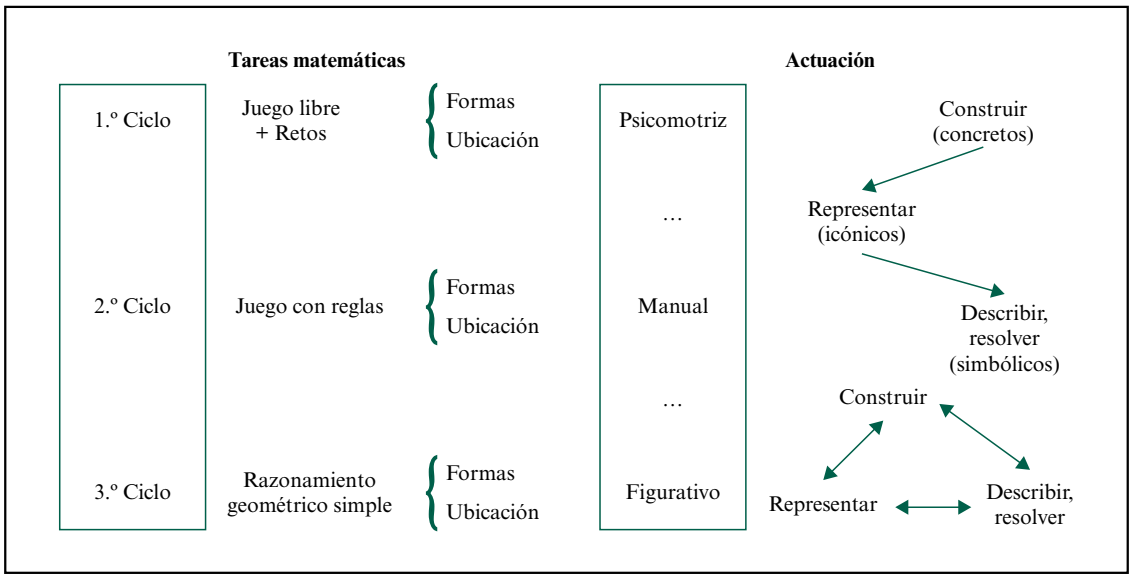


Figura 6.14.—Esquema de tareas para desarrollar el sentido espacial.

© Ediciones Pirámide

7

Sentido de la medida

MARÍA FRANCISCA MORENO CARRETERO
FRANCISCO GIL CUADRA
ANA BELÉN MONTORO MEDINA

Es posible describir la medida como un procedimiento que permite organizar el medio que nos rodea, comparando las cualidades de los objetos y cuantificándolas a partir de una unidad. La medida tiene aplicación en diversidad de campos y mejora nuestro control sobre el mundo físico mediante números. Medir es una de las «actividades universales», junto con contar, localizar, diseñar, jugar y explicar, comunes a todo grupo social:

> *La medida posee un íntimo parentesco con el hombre y sus cosas más preciadas: tierra, comida, bebida (...). La medida jamás es convencional, siempre representa un valor. La medida jamás es indiferente. Es mala o es buena* (Kula, 1980, p. 21).

© Ediciones Pirámide

La medición es importante en nuestra vida personal y en la sociedad. Es indispensable en algunas profesiones, pues por ejemplo los científicos y los ingenieros no pueden prescindir de ella, pero encontramos ciudadanos que a veces confunden conceptos o desconocen destrezas relacionadas con la medida. Los escolares deben aprender el destacado papel que juega la medición en el progreso científico-tecnológico de nuestros días y en la evolución de la humanidad. Necesitan ver y entender la medición como parte importante de sus vidas, utilizándola en otras materias escolares, como educación física, arte o tecnología, donde, por ejemplo, pueden apreciar la necesidad de medir un tablero con precisión para la construcción de una casa de madera. También deben reconocer las consecuencias de una medición deficiente en las actividades de construcción o en la cantidad de sal utilizada en una receta. El estudio PISA de la OCDE (2013) así lo señala:

> *La noción de cantidad puede ser el aspecto matemático más dominante y esencial para involucrarse con y funcionar en el mundo. Incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades en el mundo, comprendiendo varias representaciones de esas cuantificaciones y juzgando las interpretaciones y los argumentos basados en la cantidad. Involucrarse con la cuantificación del mundo incluye comprender las medidas, los conteos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo, las tendencias numéricas y los patrones. Aspectos del razonamiento cuantitativo —tales como el sentido numérico, las representaciones múltiples de los números, la elegancia en los cálculos, los cálculos mentales, la estimación y la evaluación de la razonabilidad de los resultados— son la esencia de la alfabetización matemática relativos a la cantidad (pp. 34-35).*

En consecuencia, la medida es un campo de conocimientos con presencia permanente en la Educación Matemática y de creciente importancia en el currículo escolar. Son numerosas las situaciones cotidianas donde hacemos uso de la medida. Midiendo podemos:

- Organizar y distribuir las distintas actividades a lo largo del día (es hora de...).
- Realizar cualquier proyecto de bricolaje o de manualidades, construir una valla para el jardín, una cortina para la ventana, pintar una habitación, etc.
- Efectuar comparaciones, para determinar, por ejemplo, qué atleta debe ir a las olimpiadas o qué montaña es más alta.
- Mezclar ingredientes, para utilizar una receta u obtener un determinado color a partir de la mezcla de los colores primarios.
- Administrar dosis de medicamentos a enfermos, o de productos para depuración de aguas y para uso de plaguicidas.
- Realizar repartos equitativos.
- Evitar tareas de conteo tediosas, por ejemplo fijando los precios según el peso al comprar grandes cantidades de arandelas, tornillos, púas, etc.
- Determinar temperaturas.
- Ajustar el coste en una transacción económica.

En este capítulo se considera que el lector conoce el proceso que explica la construcción de una magnitud matemática, para determinar o estimar su medida. En caso necesario, puede consultar el capítulo 14 del libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (Segovia y Rico, 2011). En los apartados siguiente proponemos reflexiones e indicaciones que ayuden al futuro profesor de Primaria a orientar procesos de enseñanza-aprendizaje para los escolares, con los que construir el sentido de la medida. Este capítulo está organizado del siguiente modo: una vez planteadas algunas ideas generales sobre el tratamiento curricular de la medida, se describe el sentido de la medida a través de sus componentes. En el último epígrafe se facilitan ideas para diseñar tareas enfocadas a desarrollar en los escolares los conocimientos, destrezas, actitudes y competencias necesarias para manejar la medida con significatividad y utilidad social.

© Ediciones Pirámide

1. CONSIDERACIONES CURRICULARES

Medir es una habilidad o destreza práctica común en la vida diaria. Esto justifica que su estudio sea un contenido destacado del currículo de matemáticas en la educación obligatoria. Pero, además, otras razones refuerzan esta importancia. Es imprescindible para los escolares el conocimiento de las magnitudes básicas, de sus unidades usuales y del sistema para su medida que se maneja en la vida cotidiana. Esto implica el reconocimiento de cada magnitud, la identificación de sus cantidades, el dominio de cada unidad de medida en sí misma, la adecuación de su elección según la situación o el objeto a medir y la relación entre esa unidad y las otras del sistema de medidas del que forman parte. También permite que los escolares den sentido a los diferentes sistemas de medida y, de modo especial, al sistema métrico decimal. Las magnitudes básicas que se trabajan durante la educación obligatoria son: longitud, superficie, amplitud, volumen, masa/peso, capacidad, tiempo y dinero. Todas ellas son magnitudes escalares y de medida aditiva, es decir, la medida de una cantidad, suma de otras dos, es la suma de las medidas de dichas cantidades. Estas magnitudes están en el currículo de la educación obligatoria por su importancia práctica y su ubicuidad social.

Por otro lado, la cuantificación de nuestro entorno físico constituye una conexión entre los contenidos matemáticos del currículo, y entre éstos y los de otras materias. Así, el proceso de medir establece vínculos entre los distintos bloques de las matemáticas, como números, álgebra, razonamiento proporcional, geometría y tratamiento de la información. También es un nexo con otras materias del currículo, como educación artística, educación física, tecnología y conocimiento del medio natural, social y cultural.

Precisamente esta conexión con otros contenidos matemáticos es la que puede justificar el hecho de que la medida aparezca en los currículos en diferentes ubicaciones dentro de los núcleos temáticos. En algunas etapas el currículo incluye un bloque expresamente dedicado a las magnitudes y su medida, y en otras ocasiones puede estar vinculado al bloque de números o bien al de geometría. En cualquier caso, los contenidos relacionados con la medida de magnitudes aparecen en los currículos de matemáticas y de otras materias escolares, para todas las etapas de la educación obligatoria.

El currículo actual de Primaria:

- Incluye las magnitudes longitud, peso/masa, capacidad, superficie, amplitud, tiempo y dinero, con tratamiento diferenciado según cada ciclo.

© Ediciones Pirámide

- Subraya de modo especial que el acto de medir cantidades sea significativo, planteando que su necesidad surja de la propia experiencia de los escolares.
- Propone planificar situaciones reales de comparación y considerar la medición como una respuesta adecuada a determinados requerimientos.
- Recomienda manejar la medida de cantidades en situaciones diversas, estableciendo los procedimientos para efectuarla: elección de unidad, pasando por el uso de unidades corporales (palmo, pie, puñado) y arbitrarias (cuerdas, varas, vasos) antes del empleo de unidades estándar.
- Considera relaciones entre las unidades y su grado de fiabilidad; plantea el uso de distintos instrumentos de medida, cada uno con diferente grado de precisión, para facilitar el ajuste al grado de exactitud requerida según el fin que se quiera dar a la medición y a la necesidad de expresar los resultados con la aproximación adecuada.
- Igualmente, establece el dominio de la estructura completa del sistema métrico decimal, de sus unidades, de sus múltiplos y submúltiplos, destacando aquéllos cuyo uso es más frecuente y necesario.
- También promueve la utilización de estrategias adecuadas para estimar resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades) en contextos familiares, acompañada por la explicación oral tanto del proceso de estimación seguido como de la estrategia utilizada en la medición posterior.
- Alude a las diferencias importantes entre la medida del tiempo o el sistema monetario y los otros sistemas de medida. Considera conveniente que el trabajo con esas cantidades no se limite a manipulaciones aritméticas, sino que se analicen situaciones cotidianas, como pueden ser la expresión del tiempo que ha transcurrido entre dos acciones o el cambio que debe recibirse al realizar una compra.

En resumen, el currículo establece contenidos matemáticos escolares que favorecen la comprensión de mensajes en los que aparecen cantidades de diferentes magnitudes, que muestran e interpretan relaciones de las situaciones reales donde se producen.

Reconocemos que el desarrollo de la competencia matemática escolar contribuye a la competencia sobre conocimiento e interacción con el mundo físico, ya que hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. Para esto es fundamental el papel de la medida que hace el mundo inteligible al suministrar datos para un mejor conocimiento del entorno, mostrar posibilidades de transformarlo y proporcionar información más precisa sobre los cambios realizados.

En contraste con la importancia de la medida, es frecuente comprobar el insuficiente dominio desarrollado por los escolares sobre estos contenidos. A menudo podemos constatar cómo, una vez concluida la escolaridad, el conocimiento alcanzado se reduce al manejo de rutinas con el sistema métrico decimal, apoyadas en esquemas, en reglas nemotécnicas o en la memorización de fórmulas. El tipo de enseñanza recibido, tendente a fomentar habilidades aisladas, puede explicar un conocimiento escasamente significativo y rutinario, que debe superarse.

Con objeto de evitar estas deficiencias, los escolares deben tener oportunidades para trabajar e incorporar nuevos conceptos, para desarrollar habilidades y mejorar su sentido de la medida. Esto significa disponer de un conocimiento completo de las magnitudes y de sus cantidades, de las principales unidades, del proceso de medir,

© Ediciones Pirámide

de los instrumentos disponibles y sus contextos y de uso, de la manera apropiada de expresar y utilizar los resultados de la medición. También consideramos el dominio afectivo, que incrementa la autoestima de los escolares al proporcionar oportunidades de realizar correctamente las mediciones, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema métrico.

Estas líneas generales de actuación están incluidas en los currículos de educación obligatoria de los países de la Unión Europea. No obstante, el futuro profesor de estos niveles educativos no siempre tiene un conocimiento amplio y una experiencia personal requeridos para el ámbito de la medida. Por ejemplo, ¿domina referentes personales para comparar o estimar medidas de objetos?, ¿ha construido y trabajado con diferentes instrumentos de medida para una misma magnitud?, ¿ha identificado las peculiaridades de la magnitud tiempo o «valor de las cosas»?, ¿ha puesto en práctica distintas estrategias de estimación?, ¿ha experimentado la dificultad de percibir o estimar el tiempo o la masa? Por concretar con un ejemplo, en la figura 7.1 aparece un contador de agua: ¿qué oportunidades proporciona para trabajar con los escolares en el aula?

Figura 7.1.—Contador de agua.

Las respuestas a las preguntas planteadas conducen a una conclusión: la reflexión sobre el proceso de medir una magnitud y dominar el sentido de la medida es un paso previo para diseñar y trabajar en el aula tareas que generen en los escolares un aprendizaje significativo de la medida.

2. EL SENTIDO DE LA MEDIDA

Trabajar las magnitudes básicas y su medida con escolares es mucho más que manejar fórmulas, memorizar un sistema estructurado de unidades o transformar unas unidades en otras. La medida de una magnitud es un proceso complejo que se inicia con la construcción de la magnitud y se completa con sus instrumentos, sus técnicas de medida y las estrategias para su estimación. Por tanto, centramos nuestra atención en la comprensión de los diversos procesos cognitivos implicados al medir una magnitud. Cuando se habla de medir una característica de un objeto son muchos los conceptos y procedimientos que hay que considerar. La comprensión de estos conocimientos que hay que promover en los escolares y de sus conexiones muestra el desarrollo del *sentido de la medida.*

2.1. Reconocimiento de cualidades comparables y medibles

Los objetos tienen multitud de cualidades o atributos observables, por ejemplo su longitud, capacidad, masa, temperatura, color, rugosidad, dureza y muchos otros. Atendiendo a una de esas cualidades es posible comparar objetos que comparten ese atributo común observable. Mediante la percepción y la comparación se destaca «qué cualidad se va a comparar», esto es, se aísla, según el contexto o la necesidad, una sola

© Ediciones Pirámide

cualidad, que es la que se estudiará. La identificación de atributos comparables en distintos objetos es una primera fase que surge de actividades perceptivas y de procesos de abstracción de las cualidades o atributos de los objetos.

Como adultos, solemos dar por supuesto que los escolares perciben las cualidades como lo hacemos nosotros. La mayoría de estos escolares tienen alguna experiencia que les permite desarrollar la percepción del mundo que les rodea. Sin embargo, en la educación obligatoria esto se suele descuidar, y en contadas ocasiones se desarrolla de modo sistemático. Es conveniente proporcionar a los escolares diversos estímulos y experiencias relativos a las cualidades de los objetos que, posteriormente, se medirán. Estas tareas constituyen un comienzo fundamental para adquirir destrezas de medición.

ACTIVIDAD 1: Escoge tres objetos y tres situaciones usuales que sean familiares a un centro escolar. Identifica, para cada caso, cinco cualidades que permitan comparar estos objetos y situaciones.

Algunas comparaciones necesitan manipular los objetos, mientras que otras son visuales o perceptivas. Las comparaciones siempre se pueden expresar verbalmente. En el caso de la longitud, no siempre es una cualidad evidente en objetos o situaciones; por ejemplo, una cuerda enrollada ofrece una percepción diferente de su longitud, siendo necesario extenderla para apreciarla, o una distancia entre dos puntos entre los que existe un «vacío». Especial atención merecen otras magnitudes, como el tiempo o «el valor de las cosas», que presentan singularidades en su percepción.

Las tareas de comparación de objetos facilitan la percepción de la cualidad y están estrechamente relacionadas con el uso del vocabulario específico para expresar la situación. Por ejemplo, para el caso de la longitud: largo-corto, ancho-estrecho, alto-bajo, cerca-lejos, próximo-distante...; para la masa: pesado-ligero, etc.

ACTIVIDAD 2: Escribe cuatro parejas de términos que expresen la comparación de una misma cualidad de objetos o situaciones.

Esto conduce a establecer un *orden entre objetos, de acuerdo con una cualidad.* A diario comparamos longitudes utilizando objetos muy sencillos. En el caso de objetos que pueden situarse próximos, o incluso uno al lado del otro, la conclusión de la comparación se obtiene fácilmente. Sin embargo, cuando esto no es posible se genera una situación diferente, siendo necesario recurrir a *intermediarios y referentes para comparar objetos según un atributo.*

Incluso podemos enfrentarnos a situaciones que demanden estrategias *ad hoc,* apropiadas para el caso. Imaginemos una situación que requiera una comparación entre el volumen de una piedra y el volumen de un bote vacío de espuma. Una primera idea podría ser sumergir los objetos en agua y comparar el volumen de agua desplazado, pero mientras que la piedra se sumerge completamente, no ocurre igual con el bote vacío. Se puede utilizar sal o azúcar en vez de agua y no se producirá la flotación del bote. El debate generado por estas situaciones aportará interesantes ideas que pueden ayudar a elaborar una comprensión más amplia de la comparación. Esta experiencia que vivimos como adultos se debe trasladar a los escolares, para que generen diferentes alternativas de comparación. En definitiva, las estrategias de comparación pueden ser diversas.

ACTIVIDAD 3: Describe una situación en la que se requiera comparar dos superficies y que no pueda realizarse directamente. Describe un procedimiento para esa comparación.

© Ediciones Pirámide

La comparación de objetos mediante una cualidad o atributo permite ordenarlos de modo creciente o decreciente, de mayor a menor valor de esa cualidad. Cuando la situación de ordenación implica el manejo de tres o más objetos requiere que el sujeto se plantee qué comparaciones debe realizar para llegar al orden correcto. Con frecuencia se observa una deficiente comprensión de la transitividad en sujetos. Por ejemplo, para ordenar tres recipientes A, B y C por su capacidad, comparan A con B y A con C. Si A es el mayor en ambos casos, sin plantearse la relación existente entre B y C, concluyen que el orden correcto es A > B > > C, cuando sólo puede concluirse que A es el mayor.

Por otro lado, las comparaciones ayudan a encontrar objetos que coinciden por su valor en ese atributo. No son más largos o menos largos, no son más pesados o menos pesados, no son más extensos o menos extensos, sino que tienen igual longitud, peso o superficie, respectivamente. Tienen la misma cantidad de longitud, ya que son igual de largos en el primer caso; la misma cantidad de peso, ya que son igual de pesados en el segundo caso; la misma cantidad de superficie en el tercer caso, ya que son igualmente extensos. Estas comparaciones se expresan y sistematizan mediante el uso apropiado de los términos relacionales «más que», «menos que» y «tanto como».

ACTIVIDAD 4: Describe dos objetos en el aula que tengan igual longitud; describe también dos sucesos que tengan la misma duración y dos recipientes que tengan igual capacidad. Argumenta en cada caso por qué la cantidad es la misma.

Comparar mediante una cualidad permite ordenar objetos y admitir, en el caso «tanto como», la *equivalencia de objetos de acuerdo con una cualidad.* Esto hace posible clasificarlos por su coincidencia respecto al valor en una misma magnitud. Ese valor se llama *cantidad de magnitud.* Una cantidad de la magnitud longitud es un valor en que coinciden distintos objetos de igual longitud. Una cantidad de la magnitud peso es un valor en que coinciden distintos objetos que pesan igual. Una cantidad de la magnitud superficie es un valor en que coinciden distintos objetos de igual extensión. Los objetos se pueden ordenar mediante su comparación por medio de un atributo. En ese caso, la cualidad que se compara es una magnitud y sus valores son cantidades.

Es necesario destacar que no todas las cualidades de los objetos se comportan del mismo modo frente a posibles uniones o agrupamientos físicos. Por ejemplo, cuando no alcanzo a coger algo del último estante del armario me subo en la silla, es decir, sumo mi altura con la de la silla; sin embargo, si vuelco en una bañera un cubo de agua a 50° y otro a 50°, la temperatura del agua de la bañera no alcanza los 100°, sino que permanece a 50°. Llamaremos cualidades medibles a aquellas que se comportan de manera aditiva, esto es, si junto dos cantidades iguales de una magnitud tengo una cantidad doble. Esta característica es la base del proceso de medida, pues, por pequeña que sea la cantidad que tomo como unidad, si la sumo (reitero) un número suficiente de veces puedo aproximarme a cualquier cantidad que desee medir, e incluso superarla.

2.2. Comprensión del proceso de medir

La comparación de atributos de objetos conduce de modo natural a la necesidad del *conocimiento de unidades para medir,* es decir, de la utilización de un intermediario o referente que podamos aplicar reiteradamente y al que

© Ediciones Pirámide

sea posible recurrir en cualquier momento. Este intermediario, menor que las cantidades a comparar, es la unidad. En los adultos predomina la tendencia a escoger unidades de medida estándar. Sin embargo, buena parte de los escolares utilizan de modo espontáneo, por ejemplo, sus manos o sus pies para comparar longitudes. Utilizar estos u otros referentes no convencionales, vinculados al propio cuerpo o próximos al entorno inmediato de los escolares, contribuye a dar significado al proceso de medición. Así lo señala la evolución histórica de la medida, que muestra el uso ancestral de unidades vinculadas al cuerpo humano. Existen razones para utilizar estas unidades antropométricas:

- Siempre están disponibles.
- Son sencillas de usar.
- Forman parte de nuestra cultura y tienen un significado ligado al uso de las cosas.

ACTIVIDAD 5: Describe una situación en la que sea útil medir una longitud con palmos. Describe otra situación en la que convenga medir el tiempo sin utilizar un reloj.

Después de utilizar unidades de medida no estándares, como el pie, el paso, el palmo, la pulgada, el puñado, el pulso u otras, se pueden encontrar múltiples razones prácticas, sobre todo de comunicación, para utilizar las unidades convencionales. Bien sea de forma arbitraria o convencional, las personas con sentido de la medida están familiarizadas con la unidad que se vaya a usar y han desarrollado destrezas visuales o táctiles para representar dichas unidades.

La imagen visual de las unidades ayuda a los escolares a decidir si el centímetro, el metro o el kilómetro son la unidad apropiada para medir una determinada distancia. Un escolar con buen sentido de la medida conoce que, si bien es posible medir la distancia de su casa al centro escolar en centímetros o incluso en milímetros, es conveniente trabajar con una unidad mayor para obtener el resultado y comunicarlo a los demás.

ACTIVIDAD 6: Busca información y describe tres unidades de medida para la capacidad de un recipiente. Señala razones para utilizar cada una de ellas.

ACTIVIDAD 7: Elige una unidad adecuada para medir las siguientes cantidades: capacidad de una jarra; capacidad de una piscina; capacidad de una cucharilla; capacidad de un pantano. Discute cómo presentarías esta actividad a un grupo de alumnos de Primaria.

ACTIVIDAD 8: Localiza en libros de texto de matemáticas para Primaria cómo se introducen las unidades de capacidad. Localiza también cómo se introducen las unidades para medir el tiempo. Explica las diferencias que encuentras en la presentación escolar de las unidades de medida usuales para estas dos magnitudes.

La *medida de una cantidad* consta de la unidad de medida y del número de veces que la cantidad contiene a esa unidad. Cada cantidad se representa así por un número seguido de la unidad de medida empleada. Representar cada cantidad de una magnitud mediante números favorece su comparación, la precisión, la comunicación de resultados, su manejo, su reproducción, etc.

ACTIVIDAD 9: Localiza en un libro de matemáticas de Primaria cómo se introduce la medida de una cantidad. Describe qué conocimientos y habilidades matemáticas deben aprender los alumnos que estudien esa presentación.

© Ediciones Pirámide

La medida de una cantidad depende de la unidad escogida. Por ello, es imprescindible indicar, junto al número, la unidad que se usa. El proceso de medir una cantidad consiste en comparar la cantidad escogida con la unidad de medida; se desarrolla en varias etapas:

- Escoger una cantidad fija, que se llama unidad de medida.
- Reiterar esta unidad tantas veces como sea preciso, sobre el objeto a medir.
- Contar el número de veces que se ha iterado.
- Asignar al objeto ese número, indicando a continuación la unidad utilizada.
- La medida de una cantidad expresa las veces que ésta contiene a la unidad.

Por tanto, medir implica comparar un atributo de un objeto con el de otro objeto que tomamos como unidad. La longitud de un objeto se compara con unidades de longitud; la superficie de una figura con unidades de superficie; la duración de un suceso con unidades de tiempo, etc. La *medida por iteración* implica que, una vez identificado el atributo a medir y escogida la unidad a utilizar, se reitera la unidad hasta igualar el objeto a medir y se cuenta el número de unidades utilizadas. El número resultante, junto con la unidad utilizada, es la medida de la cantidad. Este proceso puede simplificarse, utilizando únicamente una unidad de medida y realizando marcas que señalen hasta dónde llega.

ACTIVIDAD 10: Describe el proceso para medir el largo de la mesa con una regla. Describe también las diferentes etapas para medir en litros la capacidad de una garrafa.

Para el caso de muchas de las magnitudes que se trabajan en Primaria, podemos decir que medir una cantidad significa que dicha cantidad se «llena», «recubre» o «iguala» con una unidad de medida de esa misma magnitud. Esta idea de «llenado» o «recubrimiento» es válida para hablar con los escolares de la medida. Entonces, con esta comprensión previa, es apropiado decir que la medida de una cantidad se obtiene al contar cuántas unidades son necesarias para llenar, cubrir o igualar el atributo del objeto medido.

Dicho de otro modo, la acción de medir supone la iteración de una unidad de medida, es decir, implica una cierta noción de subdivisión, expresada en función de una unidad de medida, que es repetida sobre la totalidad de la extensión de la cantidad que se esté considerando, ya sea longitud, área, tiempo, etc., y, además, ha de ser tal que el intervalo a medir esté totalmente cubierto o lleno de unidades, sin huecos ni superposiciones. En definitiva, para medir una cantidad se agrega la unidad, tantas veces como sea necesario, para obtener el tamaño de la cantidad a medir, y la medida es el número de unidades utilizadas.

En la práctica, los instrumentos de medida, tales como reglas, cintas, escalas, relojes, cucharas, transportador, etc., son «herramientas» que facilitan el llenado, recubrimiento o igualación. Los escolares deberían usar convenientemente estos utensilios y comprender cómo funcionan, de manera que puedan usarlos en la práctica y de manera significativa.

ACTIVIDAD 11: Argumenta la utilidad de trabajar con los escolares los dos instrumentos de medida de las figuras 7.2 y 7.3.

© Ediciones Pirámide

Figura 7.2.—Báscula electrónica.

Figura 7.3.—Balanza de platillos.

2.3. Desarrollo de estrategias para estimar

Estimar es apreciar «a ojo», sin la ayuda de instrumentos o conjeturar, con algún criterio, la medida de una determinada cantidad: una longitud, capacidad, masa o tiempo. Se trata de realizar juicios personales fundados, relativos a la medida de cantidades; constituye una habilidad de evidente valor práctico, pero poco trabajada en el aula. Una estimación es el resultado de la acción de estimar.

Las habilidades de estimación facilitan la medida en la vida cotidiana, a la vez que mejoran la capacidad de comunicación verbal. Conllevan procedimientos que combinan habilidades visuales y manipulativas. El proceso de estimación, que hace uso del conocimiento previo de las unidades de medida, pone en juego:

- La unidad que se va a usar.
- El conocimiento de la relación entre esa unidad y otros objetos o unidades familiares.
- El conocimiento de la medida de objetos del entorno.
- Interés por realizar estimaciones lo más precisas posibles.

Estimar es conjeturar la medida de una cantidad, pero esa habilidad hay que educarla, ya que no puede ser arbitraria. Los propósitos principales para incluir la estimación en el currículo de matemáticas son: ayudar a los estudiantes a elaborar un marco de referencia sobre la relación entre la unidad de medida y objetos cotidianos, y entrenar a los estudiantes en actividades concretas que ilustren las propiedades básicas de la medida.

Las estrategias de estimación entrenan y ponen a prueba el sentido de la medida. Los buenos estimadores desarrollan referencias personales para las unidades de medida, dominan varias estrategias y escogen la más apropiada a cada situación.

ACTIVIDAD 12: Describe una estrategia de estimación que conozcas y hayas empleado. Explica si el trabajo en el aula con esa estrategia tendría valor educativo.

© Ediciones Pirámide

Las personas emplean al menos tres estrategias de estimación: uso de referentes, trocear y fraccionar. El conocimiento de *referentes* permite utilizar una cantidad conocida, por ejemplo que el escolar pesa 40 kg, para estimar si la masa de otra persona es mayor que, menor que, o la misma que la suya propia. Al aplicar la estrategia *troceando,* una cantidad se considera dividida en partes más pequeñas y manejables. Al estimar el área del suelo de la clase, el escolar puede mentalmente «partir» o «trocear» el área en tres partes, el área de la mesa del profesor, el área de los pupitres de los niños y el área del pequeño vestíbulo. El escolar podría combinar la estimación de las tres áreas para facilitar una estimación del área total. Con el *fraccionado* el escolar divide la cantidad en partes iguales; por ejemplo, para estimar la capacidad de una jarra puede dividir su contenido en vasos llenos de 250 ml cada uno, y trabajar con el número de vasos llenos para estimar la capacidad total de la jarra.

Los escolares con sentido de la medida son hábiles para decidir cuándo medir y cuándo estimar. Por ejemplo, si estamos preparando una paella para diez personas, poner 200 gramos de arroz más o menos no tiene importancia; sin embargo, esa misma cantidad de sal ya no es indiferente.

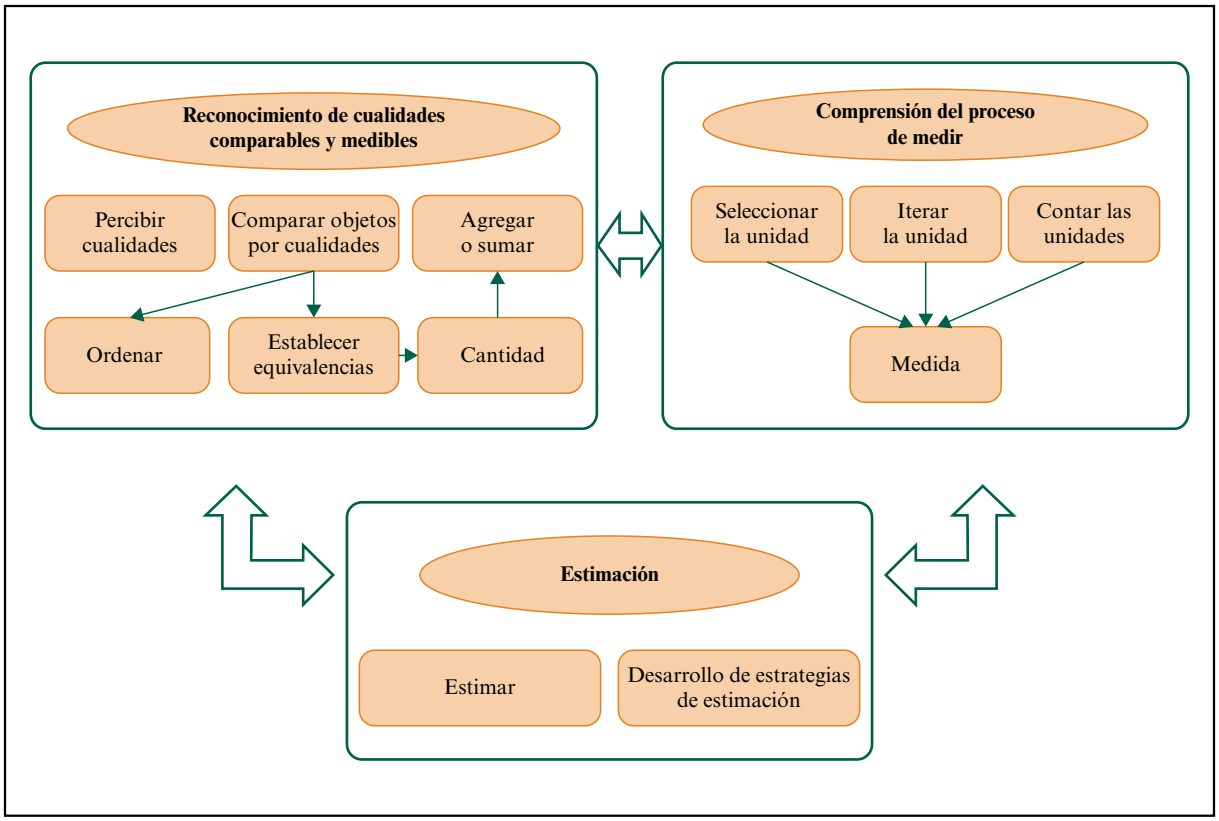


Figura 7.4.—Sentido de la medida.

© Ediciones Pirámide

3. SENTIDO DE LA MEDIDA Y MATEMÁTICA ESCOLAR

Muchos adultos tienen un escaso sentido de la medida. Su causa suele situarse en una educación obligatoria deficiente, en una experiencia limitada o inapropiada en el aprendizaje de estos contenidos. El conocimiento incompleto de conceptos, el entrenamiento escaso y rudimentario en destrezas y procedimientos, junto con actitudes negativas hacia la estimación, limitan las capacidades de los estudiantes para entender, abordar y resolver problemas con cantidades y medidas. Estas deficiencias en la instrucción matemática escolar se detectan, sin que las diversas y sucesivas normativas curriculares hayan producido cambios perceptibles. Las limitaciones mencionadas muestran el reducido sentido de la medida en muchos ciudadanos.

Uno de los objetivos de las matemáticas en el sistema educativo consiste en educar el sentido de la medida de los escolares. El profesor de Primaria contribuye a ese objetivo mediante el diseño, elección y secuenciación de tareas para promover un dominio significativo de la medida en los escolares. El futuro profesor, a su vez, debe mejorar y valorar sus propias habilidades y conocimientos en este campo, debiendo desarrollar su propia competencia matemática en el dominio de la cantidad y de la medida. Desarrollar su competencia profesional también requiere del diseño y la revisión de tareas, la elaboración de secuencias de instrucción y la planificación de propuestas de enseñanza sobre esos contenidos.

Para esbozar un planteamiento completo del proceso de construir una magnitud y su sistema de medida y, en consecuencia, generar procesos de enseñanza-aprendizaje enfocados a que los escolares desarrollen el sentido de la medida, proponemos diez líneas de acción. Pueden entenderse como guías para trabajar en las aulas e introducir a los escolares en el sentido de la medida, como unas propuestas formativas que planteen interrogantes a los alumnos y también tengan utilidad práctica y social. En definitiva, que orienten a los escolares para desarrollar su conocimiento conceptual, procedimental, actitudinal y sus capacidades sobre la medida.

Aunque se presentan secuencialmente, ello no significa que su tratamiento escolar deba ser lineal. Estas propuestas muestran diferentes aspectos que es necesario tratar para dominar, de modo significativo, la medida y la estimación de las magnitudes longitud, masa (peso), tiempo, dinero, área, amplitud, capacidad y volumen. Se muestran ejemplos con alguna de estas magnitudes que se pueden extender a las restantes. A continuación desarrollamos esas líneas de acción que orientan la instrucción sobre el sentido de medida y constituyen parte del conocimiento didáctico que requiere el profesor sobre este bloque de contenidos.

3.1. Percepción: Los escolares perciben las propiedades de los objetos

Un punto crítico para el escolar a lo largo de la educación obligatoria es reconocer, de entre todas las cualidades de una situación o un objeto, aquella que va a ser medida. Se suele comenzar con la longitud, y a continuación ampliar las experiencias a la masa/peso, el tiempo, la capacidad, el área y el volumen. A medida que los escolares progresan en nivel educativo no sólo deben ampliar la gama de cualidades medibles de los objetos, sino que deben desarrollar las relaciones entre algunas de ellas. En cualquier nivel los escolares cuentan con numerosas experiencias que les facilitará la comprensión de las cualidades medibles. A partir del lenguaje cotidiano se propicia la percepción e

© Ediciones Pirámide

identificación de una cualidad: «este hoyo es profundo», «la caja es amplia», etc.

Figura 7.5.—Olla.

A modo de ejemplo, supongamos que se pide a los escolares que «midan una olla» del tipo representado en la figura 7.5. Lo primero que necesitan conocer es *qué* van a medir de este recipiente. Podrían medir su altura o profundidad, su diámetro (distancia entre dos puntos que cumplan cierta condición) o su circunferencia (longitud de su contorno). Todas estos «atributos» del objeto se refieren a longitud, pero también se puede medir su área superficial, su volumen, su capacidad o su peso. En la práctica, al presentar la situación en un contexto es posible que estas alternativas que estamos indicando queden reducidas por la propia significación de la tarea, pero es importante tener presente que los escolares pueden plantear estas cuestiones, siendo conveniente una atenta observación a partir de actuaciones o preguntas que revelen estas dudas razonables.

La percepción del tiempo, al no ser una propiedad que se pueda concretar en cualidades físicas de objetos, resulta complicada y está condicionada por diversas circunstancias, por ejemplo la atención de un sujeto que debe percibir un intervalo de tiempo. No es igual identificar la hora en un reloj que tener una noción interna del tiempo. En el caso de la percepción de la magnitud amplitud puede estar ligada a situaciones donde hay objetos físicos articulados que se pueden abrir o cerrar, separar o juntar, etc., como las posiciones de una puerta, de un libro, un abanico, flexiones de brazos o piernas.

ACTIVIDAD 1: Elabora un listado de objetos y dibuja o recorta sus imágenes. Identifica tres atributos cuantificables para cada uno de ellos. Comprueba que, entre todos los objetos, proporcionan ejemplos de todas las magnitudes que se estudian en la educación obligatoria. Diseña con esas imágenes una tarea escolar para alumnos del segundo ciclo, cuyo objetivo consista en identificar atributos medibles de los objetos.

3.2. Comparación: Los escolares deben comparar objetos por sus cualidades

Un modo de percibir e identificar un atributo medible consiste en usarlo para hacer comparaciones. El lenguaje de la medida es el lenguaje de la comparación de cantidades y, de hecho, la medida surge de esas comparaciones. Una vez percibida una cualidad de un objeto o situación se tiende, de modo natural, a compararla con la de otros objetos o situaciones que la comparten.

Cuando los escolares comparan objetos sobre la base de algún atributo medible, este atributo debe ser el foco de la actividad. Por ejemplo, si un vaso tiene una cierta capacidad para contener líquido, ¿tendrá este otro la misma ca-

© Ediciones Pirámide

pacidad? También tienden de modo espontáneo a comparar sus alturas con las de sus compañeros. Se puede afinar un primer resultado de estas comparaciones situándolos frente a un espejo o haciendo que dibujen sus siluetas en papel para poder compararlas. En cualquier caso, esta actividad se puede realizar sin ninguna habilidad numérica previa. No es imprescindible ninguna medida, pero debe idearse alguna estrategia de comparación.

ACTIVIDAD 2: Con el listado de objetos y de atributos elaborado en la actividad anterior, diseña una tarea que consista en encontrar nuevos objetos cuyas cualidades tengan valores «mayores que» o «menores que» los identificados en los objetos iniciales.

Experiencias de este tipo, con la longitud y otras magnitudes, como la masa/peso o la capacidad, se adquieren en actividades familiares o sociales, incluso fuera de los centros educativos. Mirar, tocar y saborear facilita la comprensión e identificación de las cualidades de los objetos que se pueden cuantificar. Por ejemplo, se puede identificar cuál de dos objetos es más pesado sosteniéndolos con las manos. Se pueden comparar dos zapatos poniendo uno al lado de otro y viendo cuál es más largo. Construir o diseñar algo que sea lo mismo en términos de medida de un atributo es otro tipo de comparación. Por ejemplo, «corta una pajita que sea tan larga como esta tiza» o «dibuja un rectángulo que tenga la misma área que este triángulo».

A través de la conversación se puede ayudar a los escolares a comparar cualidades: esta caja tiene menos capacidad que aquélla, mi cartera pesa más que la tuya... Desde los primeros niveles de enseñanza los escolares comparan y ordenan objetos utilizando expresiones como *«más* largo*»*, *«más* corto», *«menos* pesado» o *«tantos como»*. Estas situaciones informales e intercambios verbales pueden ser aprovechadas por el profesor para guiar y ampliar las experiencias de los escolares, planificando y haciendo que estén disponibles para explicar los resultados de estas actividades. También ayudan a los escolares a construir su vocabulario y permiten al profesorado observar la comprensión, las estrategias utilizadas para comparar y las ideas erróneas que pueden mantener los escolares.

ACTIVIDAD 3: Diseña una tarea que introduzca distintas estrategias para comparar superficies de figuras geométricas.

3.3. Unidades no estándar. Medidas no convencionales

Al comparar cantidades no siempre es posible hacerlo directamente, esto es, superponer o aproximar los objetos para disponer del resultado de su comparación. En estos casos hay que recurrir a un intermediario o referente que permita la comparación. Dos tipos de situaciones hacen, implícitamente, surgir la necesidad de la medida y de adoptar una unidad como referente:

- Planificar y prever. Por ejemplo, ¿cabrá este armario en aquel hueco?, ¿cómo debo cortar estos tablones para hacer una estantería?, ¿con este retal puedo hacer un mantel para la mesa del sofá?
- Transmitir el valor de una cantidad sin tenerla presente físicamente, comunicar el tamaño de algo. Por ejemplo, si se indica que la extensión de un terreno es 5 tahúllas, evidentemente, para que esta comu-

© Ediciones Pirámide

nicación sea efectiva el interlocutor tiene que estar familiarizado con la unidad utilizada.

En este punto la tarea del profesor consiste en proporcionar experiencias significativas que permitan a los escolares escoger referentes de comparación en su entorno e iniciarles en el proceso de uso por iteración, esto es, iniciarles en las técnicas de medida. Los primeros referentes de comparación deben ser objetos cercanos y fácilmente accesibles, sin necesidad de que estén estandarizados, comenzando por partes del propio cuerpo: pies, manos, dedos, zancadas, puñados; posteriormente se pasará a escoger objetos del entorno: lápices, sujetapapeles, palillos de dientes, tapones de botella, vasos de plástico, piedras, tornillos, piezas de papel o madera, etc.

ACTIVIDAD 4: Diseña un trabajo de investigación donde los escolares recopilen unidades de capacidad no convencionales del entorno. Previamente puedes informarte sobre casos curiosos; por ejemplo, en múltiples ocasiones las unidades tradicionales son una medida del valor económico de los objetos. Este es el caso de la fanega, que es una medida de superficies agrícolas y cuya extensión varia de unas localidades a otras. Corresponde a la cantidad de terreno que se puede sembrar con una fanega (unidad de capacidad) de grano. Además, dependiendo de la fertilidad de la tierra se puede echar el grano más o menos esparcido. Por tanto, mide la capacidad de producción del terreno y su valor en rentabilidad económica.

Puesto que aportan significatividad al proceso de medida, estos referentes no convencionales son útiles para las comparaciones, pero debemos orientar a los escolares a que manejen las unidades de la sociedad globalizada, los estándares de medida.

3.4. Unidades estándar. Medidas convencionales

Diferentes experiencias conducen a la necesidad de utilizar unidades de medida convencionales que permitan la comunicación. Por ejemplo, se presenta dificultad en la comunicación cuando se pretende que una persona, que desconoce la longitud del paso de su amigo, se haga una idea relativamente precisa de la dimensión del dormitorio de éste si le indica que mide 6 pasos de ancho por 7 pasos de largo. El uso de unidades legales, comunes para gran parte de la población, constituye una solución al problema.

ACTIVIDAD 5: Identifica situaciones similares a la anterior que puedas utilizar en tareas y que faciliten a los escolares entender la conveniencia de compartir unidades para realizar las medidas.

Cuando a lo largo de la historia se cambia la unidad utilizada por un determinado grupo social por otra, que pasa a ser la convencional, se presentan múltiples dificultades, ya que no se trata de un proceso sencillo. Un ejemplo reciente lo tenemos con el euro como unidad monetaria, para establecer el valor de las cosas. Las unidades monetarias propias de cada país desaparecieron para dejar paso a una nueva unidad convencional compartida por los países de la Unión Europea. Resulta fácil recordar las dificultades que las personas tuvieron para acomodarse a la utilización de la nueva moneda.

Los estándares de medida cumplen dos funciones. Primero, permiten comunicar una medida de modo simple y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes lugares y áreas geográficas, sin variación a lo largo del tiempo. Para que las unidades del sistema de medidas permitan la comunicación y el comercio deben ser:

© Ediciones Pirámide

- Universales, conocidas por toda la población de un país o de una comunidad profesional; sería el caso del metro y no de la arroba.
- Contrastables, que no tengan un valor en cada localidad, como es el caso la fanega de secano de Almería, la de regadío de Almería, la de Murcia, etc.
- Inalterables por el paso del tiempo, las condiciones atmosféricas, el uso, etc. Así, vemos que algunos patrones del metro están construidos en madera y tienen cantoneras de metal para evitar el desgaste.
- Construibles, para que estén a disposición de los ciudadanos y se puedan usar sin limitaciones cuando se necesiten. Además, deben ser construibles en distintos materiales y diferentes características para adaptarse a diferentes usos; así, vemos que hay metros de costurera, de carpintero, flexómetros, varas de metro, etc.

3.5. Sistema internacional (SI) y su enseñanza

El sistema internacional de unidades (SI) recogido en el Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida (BOE, 21-1-2010), constituye un sistema de unidades estándares relacionadas y actualmente aceptado en casi la totalidad de países. Para llegar a este punto han hecho falta varios siglos y se ha requerido un largo proceso de adaptación para su utilización. Esta circunstancia debe ser tenida en consideración al trabajarlo en las aulas.

ACTIVIDAD 6: Localiza el Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, y haz un resumen de sus implicaciones más importantes para la enseñanza.

Con el SI tenemos una amplia gama de posibles unidades, relacionadas entre sí, y que se ajustan a las características de la cualidad a medir. Por ejemplo, el centímetro es más adecuado que el metro para medir la longitud del lápiz, y el litro no resulta adecuado para medir el contenido de una ampolla de medicamento.

Es importante escoger una unidad apropiada según el objeto y la cualidad a medir. Los escolares pueden tener dificultad para entender que medir cualidades distintas de los objetos hace necesarias diferentes unidades. Por ejemplo, la longitud puede medirse con el metro, pero esta unidad no sirve para medir la capacidad. Se debería comprender que para la capacidad se necesita el litro.

Además, se debe tener presente:

- La unidad debe ser menor que el objeto a medir, pero no tanto que el resultado de la medida sea un número muy grande.
- Si la medida se requiere con bastante precisión, deben utilizarse distintas unidades.

Para que el acto de medir sea significativo y comunicable los escolares deben estar familiarizados no sólo con las unidades de medida estándar, sino también con sus múltiplos y submúltiplos.

ACTIVIDAD 7: La medida del valor de las cosas no sólo se puede hacer a través del dinero. Antiguamente el valor de cualquier mercancía se determinaba buscando otra que se intercambiaba por ella, de forma que el mercado se regía por el trueque. Posteriormente surge el dinero como una medida del valor de cualquier mercancía, su precio. Los períodos de crisis económica revitalizan situaciones de trueque. Indaga y realiza un informe que identifique algún caso y reflexiona sobre la contribución del hecho a la educación de los escolares.

© Ediciones Pirámide

Para facilitar la comprensión del uso de unidades es necesario utilizar muchas copias de la unidad, de modo que se disponga de suficientes para que realmente se pueda cubrir, llenar o igualar el atributo que se desea medir. De este modo se puede medir el área de un pupitre cubriendo su superficie con cuadrados de 1 dm de lado. Otra alternativa, más difícil, es utilizar sólo una copia de la unidad y realizar el proceso de iterarla. La superficie del pupitre se puede medir iterando únicamente un cuadrado de 1 dm de lado, moviéndolo de posición y teniendo cuidado de recordar qué partes del pupitre y cuántos cuadrados hemos utilizado en la iteración.

Un rasgo distintivo de la medida es que se pueden utilizar distintas unidades para medir una misma cantidad. Ligado a ello aparece otro aspecto crucial en el desarrollo del proceso de medida. Nos referimos a la comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad y el número de unidades necesario para medir una cantidad dada, esto es, cuanto menor sea la unidad mayor número de unidades necesitaré para cubrir la cantidad a medir. Es difícil comprender e interiorizar el hecho de que si las unidades son más pequeñas los resultados de medir con ellas producen medidas más grandes y viceversa. Esta relación de proporcionalidad inversa puede construirse a partir de la reflexión sobre los resultados de realizar diversas medidas. La predicción y discusión sobre los resultados añade significatividad a la naturaleza de estas actividades.

ACTIVIDAD 8: Expresa la medida de una misma botella en litros, decilitros y centilitros. ¿Qué medida viene dada por el mayor dato? ¿Cuál por el menor dato? Diseña una tarea para escolares del tercer ciclo de Primaria que muestre esta propiedad.

Un caso particular es el sistema monetario, del que se pueden citar diferencias importantes con otros sistemas de medida:

- No existe, en general, un proceso de medición del «valor económico» que sea análogo al de medir otra magnitud, por ejemplo el área o el volumen. El «valor económico» o «precio» queda determinado por una o varias personas y, usualmente, la forma habitual de averiguar el precio no es medir, sino preguntarlo o leerlo en un cartel.
- El dinero es discreto o discontinuo, y en el sistema monetario tiene un límite para el fraccionamiento de la unidad. No usa criterios estrictamente decimales, con agrupamientos intermedios de dos y cinco.
- El dinero supone un sistema de intercambio basado en símbolos materiales, monedas y billetes de diferentes tipos.

3.6. Aprecio y satisfacción en la medida y en la estimación

Los adultos pueden estar convencidos de que los progresos en ciencia, arte y tecnología han podido realizarse por la precisión de las medidas, pero este aprecio del impacto de la medida en nuestro entorno no es evidente para los escolares. La variedad de experiencias de medida y el contacto con el papel que juega la medida en nuestras vidas será lo más efectivo para desarrollar este aprecio. Los escolares pueden hacer lecturas de noticias relacionadas con la medida o incluso cocinar, hacer modelos o plantear actividades de profesiones que constantemente hacen uso de las medidas.

ACTIVIDAD 9: Busca documentación en la biblioteca de tu centro, en la red, en librerías o en instituciones científicas y elabora un pequeño listado de referencias que avalen la contribución del sistema de medidas al avance del conocimiento.

© Ediciones Pirámide

El aprecio del valor de la medida en el entorno probablemente esté relacionado con la satisfacción de ser capaz de medir. El profesorado debe incentivar que los escolares, desde pequeños, realicen estimaciones y medidas, tomando tiempo para que manejen instrumentos adecuados y tengan abundantes oportunidades de estimar, medir y refinar su técnica. Todos deben participar y compartir los procesos que van realizando. La práctica incentivará la mejora y la confianza en la propia habilidad de realizar medidas correctas. Los escolares deben estimar y luego medir objetos que les interesen y en contextos que sean significativos.

El desarrollo de habilidades en la estimación pasa por estimular a los escolares para que realicen estimaciones. Probablemente la mejor estrategia es hacer que primero estimen, y posteriormente midan para contrastar los resultados. Esto vale tanto para las unidades informales como para la estándar. También es útil que los escolares describan el procedimiento que han seguido para realizar esa estimación. Así, pueden identificarse las estrategias que generan mejores resultados.

Podemos citar al menos cuatro razones para incluir la estimación en las actividades de medida:

- Estimar ayuda a los escolares a centrarse en el atributo que se va a medir y en el proceso de medida. Pensar cómo podría un alumno estimar el área de la portada de un libro con tarjetas de un juego. Para hacerlo, es necesario identificar qué es el área y cómo las unidades escogidas pueden cubrir la cubierta del libro.
- Estimar proporciona motivación intrínseca a las actividades de medida. Es divertido ver cómo de certera es esa estimación o si un grupo hace mejor estimación que el resto de grupos.
- Cuando se utilizan unidades estándar, la estimación ayuda a desarrollar familiaridad con la unidad. Para estimar la altura de una puerta en metros, antes de medir se necesita tener una idea sobre el tamaño del metro.
- La utilización de puntos de referencia para hacer una estimación promueve el razonamiento multiplicativo. Por ejemplo, la anchura de un edificio es aproximadamente la cuarta parte de la longitud de un campo de fútbol.

3.7. Usar los instrumentos y el vocabulario de la medida con precisión y eficacia

Es imprescindible medir para dominar esa destreza práctica. En el aula, la medición sin acción es meramente un tipo de rutina memorística o ejercicio intelectual. La práctica debe familiarizar a los escolares con la aproximación, mediante tareas que les permitan medir los mismos objetos con las mismas unidades, para posteriormente contrastar los resultados obtenidos y observar que no todos concuerdan. De la discusión sobre estas observaciones pueden extraerse ideas sobre la precisión y la exactitud.

Las estrategias utilizadas para determinar medidas son variadas; por ejemplo, es posible hacerlo a través de contar, estimar, fórmulas o instrumentos. Estos últimos son los que la mayoría asociamos a la medición. Las reglas graduadas, cintas métricas, recipientes, escalas, relojes, cronómetro, balanzas, pesos..., deben usarse en situaciones variadas, de modo que los escolares capten que la precisión de sus medidas depende del instrumento de medida y del cuidado con que ejecuten la técnica. Se debe apreciar que todo instrumento lleva implícito un error, pues incluso los instrumentos precisos de medi-

© Ediciones Pirámide

ción no están libres de error. Para poner esto de manifiesto se pueden utilizar varios cronómetros al medir los tiempos en una carrera, balanzas de precisión... Tareas como medir por diferentes grupos la valla que rodea al colegio, utilizando cintras métricas o distintos tipos de metro, permiten plantear cómo comparar las diferentes medidas obtenidas para asignarle «una» medida a la valla, debatir sobre un posible promedio de las medidas obtenidas, la posible necesidad de volver a repetir la medida e identificar razones que puedan explicar las diferencias apreciadas.

Variadas experiencias deben permitir a los escolares medir con un grado de precisión apropiado una situación concreta. La precisión tiene que ver tanto con la unidad de medida utilizada para medir —cuanto menor es la unidad de medida mayor es el grado de precisión—, como con el instrumento de medida, si es capaz de medir hasta décimas o hasta milésimas.

Estas experiencias deben ser diseñadas y desarrolladas por el profesorado. Por esta razón resulta útil conocer y manejar los instrumentos de medida. Estos «aparatos» o «artefactos» sustituyen el uso de unidades de medida reales. Es importante comprender cómo funcionan los instrumentos de medida, de manera que puedan usarse correctamente y de manera significativa. Un lugar destacado ocupa la lectura de escalas e instrumentos, especialmente las basadas en la recta numérica. En cualquier caso, utilizar instrumentos de medida construidos por los escolares mejora sin duda la comprensión de cómo funcionan estos instrumentos (figura 7.6).

A continuación se muestra un proceso que da significatividad al uso de la regla.

Existe una amplia variedad de instrumentos de medida. Trabajar en el aula con la lectura de contadores de agua, electricidad, velocímetros, cuentakilómetros, relojes, cronómetros, etc., permitirá a los escolares familiarizarse con las medidas en la vida diaria.

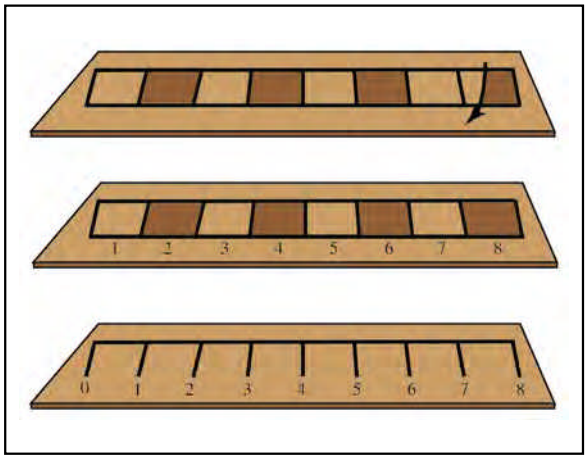


Figura 7.6.—Construcción de una regla.

También los términos utilizados son un componente central del sentido de la medida. La medida abarca un número limitado de términos conocidos, que se encuentran en el vocabulario cotidiano de los ciudadanos y en multitud de sus prácticas y actuaciones sociales. No es un vocabulario complejo, pero sí preciso, que hay que aprender y utilizar con cierto dominio técnico. La práctica muestra que no siempre se cuida en la escuela la precisión en la expresión de la medida de una magnitud, medida que se expresa por cantidades, las cuales constan de una unidad de medida y del número de veces que dicha unidad está contenida en esa cantidad.

ACTIVIDAD 10: Redacta tres tareas relativas al sentido de la medida, en cada una de las cuales se utilicen al menos cinco términos de su vocabulario básico.

También es destacable la satisfacción y confianza que puede sentir un escolar después de haber realizado un buen trabajo respecto a la medida. Deben sentir que han alcanzado la pre-

© Ediciones Pirámide

cisión deseada y han comprendido las limitaciones. Enseñar a los escolares que ninguna medida continua es exacta debe mostrarse facilitándoles experiencias adecuadas en lecturas de instrumentos y escalas. La capacidad para leer e interpretar un nuevo tipo de escalas debe ser satisfactoria.

3.8. La medida como aproximación

Dado el procedimiento a través del cual se consiguen, las medidas casi nunca son exactas, sino aproximadas. Esta idea de aproximación es parte de la naturaleza de la medida de cualquier magnitud continua. Los errores que se cometen pueden ser debidos a diferentes motivos, pero destacan los asociados al propio uso de los instrumentos de medida: mala calibración del instrumento, alteración debido a las condiciones ambientales, errores de lectura u otros. El carácter aproximado de cualquier medida se confunde frecuentemente con la precisión en la medición.

Los escolares deben comprender que todas las medidas de magnitudes continuas son aproximadas. La idea de la medición como aproximación es difícil de enseñar y, además, una opinión bastante generalizada es que podemos medir con absoluta precisión. Modificar esto requiere muchos ejemplos de medidas en los que se reconozca que se ha medido con la máxima precaución, pero que una medida exacta es físicamente imposible. Se puede hacer una medida cuidadosa del área de una mancha de pintura, utilizando una red de cuadrícula en papel transparente cada vez más y más fina, o recurrir a otras técnicas como el «cortar y pegar», pero sólo tendremos oportunidad de obtener sucesivos valores aproximados para la medida, no llegando a obtener una medida exacta. La aproximación al valor de la medida surge también cuando utilizamos datos previos de medida para combinarlos en una fórmula.

En todas las actividades de medida hay que potenciar el uso de un lenguaje aproximado. El pupitre es *más o menos* 15 varillas de largo. La silla es *un poco menos* que 4 pajitas de alto. El uso del lenguaje aproximado para los escolares de los primeros niveles es muy útil, porque muchas de sus medidas no son precisas.

Tenemos que distinguir entre error y equivocación. Una equivocación implica un descuido por parte de la persona que hace la medida, por haber leído mal los números de la escala, por haber realizado una anotación inapropiada o por no haber colocado bien el instrumento, por ejemplo no hacer coincidir el cero de la regla con el principio de la longitud a medir. Estas equivocaciones pueden evitarse si se es cuidadoso con el procedimiento de medir. Sin embargo, hay una variación que, inevitablemente, se produce cuando repetimos una medida, y que es achacable al factor humano, debida, por ejemplo, a diferencias en la alineación de la regla con el principio del segmento a medir, o a que el extremo del segmento coincida entre dos marcas de la regla. Este tipo de situaciones son las que nos llevan a hablar de error en las medidas.

Para medir hay que elegir un instrumento, y todos los instrumentos tienen limitaciones debidas a su construcción. El juicio humano y la habilidad están presentes en el uso de cualquier instrumento, sin importar los descuidos y los errores que puedan cometerse.

ACTIVIDAD 11: Supongamos que en una tienda de bricolaje tienen que cortar quince listones de madera de un metro. El primero se usa para cortar el segundo y éste para cortar el tercero, y así sucesivamente. Explica qué efecto tiene cuando se produce un error de medida al cortar el primer listón. Escoge otra magnitud y describe una tarea donde se pueda producir otro error acumulado.

© Ediciones Pirámide

3.9. Construcciones con medidas y escalas

Medir algo ya concluido es una actividad diferente a diseñar y construir algo a partir de ciertas medidas. Interpretar las medidas que proporciona un plano o las de una receta, y después ejecutarlas, requiere destrezas importantes que se pueden trabajar. Construir modelos a escala de estructuras simples o complejas, hacer patrones de papel para un vestido o construir una maqueta en cartón son experiencias que dependen del sentido de la medida. Además del sentido de la medida, estos trabajos requieren dominar el razonamiento proporcional, que es un dominio avanzado del sentido numérico.

Los escolares deben ser capaces de aplicar su conocimiento de la medida y de la estimación para construir o hacer objetos con unas dimensiones dadas. Para estos casos se muestra especialmente útil dominar la relación entre las unidades de las distintas magnitudes y el uso de fórmulas. Por ejemplo, a partir de la unidad de longitud, el metro, se obtiene la unidad de medida para el área, el metro cuadrado, que es un cuadrado de un metro de lado. También se deriva la unidad de volumen, el metro cúbico, que es el volumen de un cubo de un metro de arista.

Al construir objetos según unas dimensiones dadas se pone de manifiesto el grado de competencia matemática alcanzado por los escolares. La acción de construir es la manifestación y expresión de ser competentes, de dar respuesta a la tarea donde aparece una medida, encontrando y movilizando los recursos disponibles.

ACTIVIDAD 12: Localiza un mapa de un país, el plano de tu ciudad y el plano de una casa. Identifica sobre el primero una trayectoria, sobre el segundo una distancia entre edificios importantes y en el tercero una dimensión de la vivienda. Enuncia una tarea para cuya respuesta haya que conocer los valores reales de la trayectoria, la distancia y la dimensión, respectivamente.

3.10. Resolución de problemas, experiencia con la medida y la estimación

Las experiencias de medida y estimación deben desarrollarse en todos los niveles educativos y constituyen un lugar común entre otras asignaturas y las matemáticas, incluso entre distintos bloques de conocimientos matemáticos, por ejemplo la aritmética y la geometría. La variedad e importancia de las actividades de medida dependen de la convicción que tenga el profesorado sobre la importancia de la medida para los escolares. La noción de competencia matemática facilita esta interpretación. El planteamiento y la resolución de problemas constituyen una parte central de la competencia matemática y, por ello mismo, del sentido de la medida.

ACTIVIDAD 13: Inventa el enunciado de un problema en el cual utilices cantidades de las magnitudes capacidad, tiempo, superficie y longitud, respectivamente.

Los escolares deberán tener una experiencia continua con la acción o actividad de medir y de estimar, desde infantil hasta los grados superiores. Además, el modo en que los escolares se acercan al mundo de la medida debe tener una continuidad a lo largo de los diferentes niveles. Por ejemplo, la noción de replicación de la unidad, es decir, la necesidad de repetición de una única unidad para obtener la medida, debe mantenerse al incorporar, en sucesivos niveles, otras magnitudes o nuevos instrumentos

© Ediciones Pirámide

de medida, especialmente cuando el instrumento de medida es más sofisticado y se produce una «ocultación» del proceso. Es el caso del peso en las básculas electrónicas o la utilización del metro láser para medir la longitud.

4. BALANCE

Como hemos argumentado, en el *sentido de la medida* destaca la identificación de atributos y características mensurables de los objetos, así como el conocimiento, la selección y utilización de unidades de medida apropiadas a cada situación, tanto no convencionales como convencionales. Incluye las relaciones, las situaciones y las entidades en el mundo, comprendiendo varias representaciones de esas cuantificaciones y juzgando las interpretaciones y los argumentos basados en la cantidad. Involucrarse con la cuantificación del mundo supone comprender las medidas, los conteos, las magnitudes y las unidades. La estimación es un aspecto crucial del sentido de la medida, cuando los escolares son capaces de seleccionar la técnica más apropiada en cada situación. De modo global, el sentido de la medida se centra en dimensionar adecuadamente el entorno y en aplicar reflexiva y coherentemente diversas estrategias de medida, de acuerdo a las exigencias y necesidades de las situaciones problemáticas enfrentadas. El sentido de la medida propone todo un programa de trabajo, en el que la formación inicial y la contribución del profesorado en ejercicio resultan esenciales, para que lo desarrollen los estudiantes y aprendan a enseñarlo.

© Ediciones Pirámide

8

Sentido estocástico

JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO
LUIS SERRANO ROMERO

Razonar en situaciones de certeza y evidencia no resulta complicado, sobre todo cuando desde la infancia se ha recibido una educación basada en relaciones de causa y efecto y se ha desarrollado una forma de pensar sostenida en situaciones deterministas. Así, por ejemplo, es patente que si se deja caer una copa de cristal al suelo se romperá. Pero también están presentes en la vida de cada persona otros hechos cuya certeza y evidencia no son tan claras, existiendo cierta incertidumbre sobre que algunos acontecimientos puedan suceder de una forma concreta y determinada o de otra. Estos sucesos se presentan en situaciones de incertidumbre, inherentes a la misma naturaleza. La incertidumbre, que puede mostrarse de diferentes formas, se puede presentar por una fal-

© Ediciones Pirámide

ta de información, por imposibilidad de tomar las medidas adecuadas, por errores o desconocimiento de los datos disponibles, y por otras razones.

Es importante que la formación primaria ayude a los escolares a desarrollar destrezas básicas para que sepan distinguir entre fenómenos de naturaleza aleatoria y fenómenos deterministas que ocurren en el entorno, usando razonadamente la información de que dispongan. Una vez identificada una situación de incertidumbre, mediante un análisis de sus datos, su representación y el cálculo de las medidas necesarias, el escolar estará preparado para tomar decisiones en esa situación y realizar inferencias o predicciones sobre la misma.

Los ciudadanos, adultos y jóvenes, se han ido convirtiendo durante los últimos años en usuarios habituales de datos e información estadística. Por este motivo, los sistemas educativos se ven obligados a adoptar decisiones e incluir en los planes educativos y de formación conocimientos y capacidades con los que acoger e interpretar la información que reciben los escolares, para que la analicen y cuenten con criterios que les capaciten para tomar decisiones informadas. En este sentido, los documentos curriculares han ido incluyendo, de manera progresiva a lo largo de los últimos años, expectativas de aprendizaje sobre la probabilidad y la estadística y propuestas para su enseñanza. El objetivo de esta enseñanza comprende el conocimiento de los hechos aleatorios o estocásticos y su interacción con las distintas materias que debe cursar un escolar; también podrá apreciar los beneficios que la estadística y la probabilidad aportan en la toma de decisiones para muchas situaciones personales, educativas, profesionales, públicas o científicas. Con el fin de atender estas y otras necesidades, los currículos recientes dedican una reflexión extensa al sentido estocástico.

Este capítulo aborda las ideas del sentido estocástico y sus componentes. Para terminar, se presentan algunas cuestiones relacionadas con el currículo de Educación Primaria.

© Ediciones Pirámide

1. SOBRE EL SENTIDO Y EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO

Ya se introdujo el sentido estocástico en el segundo capítulo, indicando que expresa un uso instruido de los contenidos comprendidos en el bloque de estadística y probabilidad. Este sentido se ejercita al formular preguntas cuya respuesta no está determinada de modo concluyente, para después recoger, organizar y presentar datos de diversa índole con los cuales interpretarlas. También se pone en práctica al seleccionar, usar y validar métodos estadísticos para organizar y explicar las colecciones o distribuciones de datos, conjeturar y evaluar inferencias y predicciones. Esta capacidad contribuye a reconocer el lugar de los procesos de variación, dar un sentido de cuantificación de esa variación, identificar la incertidumbre y el error en las mediciones y comprender el cambio. Incluye también la formación, la interpretación y la evaluación de conclusiones derivadas de situaciones donde es central la incertidumbre. La presentación y explicación de datos son conceptos clave en esta categoría. Estudiar y abordar situaciones de aleatoriedad, para poder evaluar la posibilidad, imposibilidad o seguridad de determinados hechos y sucesos, también son capacidades clave.

El llamado sentido estocástico representa el sentido matemático usado en situaciones no deterministas, a fin de obtener unas conclusiones coherentes. Para ello, este sentido combina conocimiento estadístico, para recoger y organizar los datos, y conocimiento probabilístico, para inferir conclusiones. A partir de ellos se ponen en marcha unos razonamientos específicos, el razonamiento estadístico y el razonamiento probabilístico, lo que depende en gran medida de la comprensión de los hechos y conceptos probabilísticos y estadísticos, así como del conocimiento didáctico que el profesor tenga para su enseñanza.

Mientras que el razonamiento estadístico podría ser definido como la manera en que las personas argumentan, hacen inferencias y dan sentido a la información con conceptos y propiedades estadísticas, por razonamiento probabilístico se puede entender la manera de analizar y argumentar, de formular, interpretar y demostrar enunciados probabilísticos.

Ejemplo A. Razonamiento probabilístico

Si se lanzan dos monedas, los resultados se podrían suponer equiprobables:

P (obtener dos caras) = P (obtener dos cruces) = P (obtener cara y cruz) = 1/3

Sin embargo, mediante la correcta descripción del espacio de sucesos, se observa que:

© Ediciones Pirámide

	Resultado 1	Resultado 2	Resultado 3	Resultado 4
Moneda 1	Cara	Cara	Cruz	Cruz
Moneda 2	Cara	Cruz	Cara	Cruz

Es decir, un análisis detenido muestra cómo las probabilidades son:

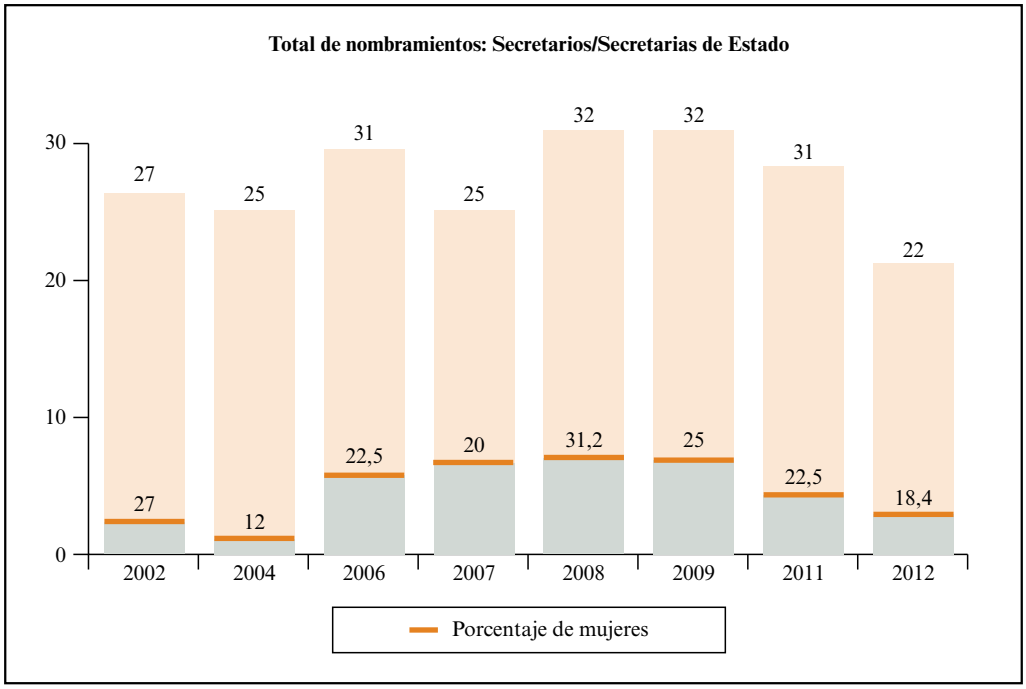
$$P \text{ (obtener dos caras)} = P \text{ (obtener dos cruces)} = 1/4$$

$$P \text{ (obtener una cara y una cruz)} = 1/2$$

Más concretamente, una persona que sabe razonar estadísticamente interpreta conjuntos de datos y es capaz de representar esos datos de forma resumida e inteligible. Una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y puede modelarlas, escapando de las dudas intuitivas que pueden generar errores y contradicciones, y es capaz de determinar la probabilidad de diferentes tipos de sucesos.

Ejemplo B. Dar sentido a la información estadística

El 10 de abril de 2012 apareció una noticia en el diario Elpais.com en la que se trataba de destacar la falta de paridad en el gobierno de España establecido tras las elecciones generales de 2011. Aparecía, entre otros, el siguiente gráfico (figura 8.1):



FUENTE: elaboración propia a partir de datos de la Presidencia del Gobierno.

Figura 8.1

© Ediciones Pirámide

El eje horizontal muestra los años, y el vertical el número absoluto de Secretarios de Estado. Una persona con sentido estadístico se daría cuenta de los muchos errores de este gráfico. Entre ellos, se pueden destacar:

- Se mezclan porcentajes en las columnas donde se representan frecuencias absolutas.
- En 2006 y 2011 hay el mismo número de Secretarios de Estado y el mismo porcentaje de Secretarias de Estado, pero las alturas de las barras oscuras son diferentes.
- En 2012 el porcentaje es más bajo que en 2002, sobre un total también menor, y sin embargo la altura de la zona oscura es mayor que en 2002.

Más errores sobre este gráfico en: http://www.malaprensa.com/2012/04/barras-no-paritarias.html.

La noticia completa en: http://sociedad.elpais.com/sociedad/2012/04/09/actualidad/1333995760_518343.html.

Puesto que la razón de ser del sentido estocástico es la incertidumbre, aquí no se pueden usar los mismos principios que se usan con los hechos deterministas, en los que toda causa tiene su efecto. Los tipos de razonamiento lógico tradicionales empleados en el desarrollo del conocimiento científico, razonamiento inductivo y razonamiento deductivo, se completan con el razonamiento abductivo, según el cual a partir de la observación de hechos o fenómenos podemos elaborar una hipótesis que los explique; aunque esa argumentación no constituya una forma inferencial lógicamente válida, su uso se acepta como estrategia de descubrimiento.

Ejemplo C. Razonamientos inductivo, deductivo y abductivo

En el *razonamiento inductivo,* partiendo de ejemplos específicos se induce una conclusión general.

Caso específico: Juan es mi vecino.
Premisa: Juan tiene plaza de aparcamiento.
Conclusión general: Todos mis vecinos tienen plaza de aparcamiento.

El *razonamiento deductivo* consiste en establecer una conclusión a partir de una información dada mediante las reglas de la lógica. Por ejemplo, si se parte de las premisas «todos los españoles son europeos» y «Juan es español», se puede deducir que Juan es europeo.

Regla general: Todos mis vecinos tienen plaza de aparcamiento.
Premisa: Juan es mi vecino.
Conclusión: Juan tiene plaza de aparcamiento.

El *razonamiento abductivo* consiste en explicar las premisas de un razonamiento lógico a partir de la conclusión.

Regla general: Todos mis vecinos tienen plaza de aparcamiento.
Conclusión: Juan tiene plaza de aparcamiento.
Premisa: Juan es mi vecino.

1.1. Conocimientos básicos que sostienen el sentido estocástico

La combinación de datos y azar se identifica por la presencia de algunos términos claves como incertidumbre, variabilidad, aleatoriedad, azar, proporción, posible, imposible, suceso, espacio de sucesos, frecuencia, probabili-

© Ediciones Pirámide

dad, predicción, gráfico, tabla, media... Además de su uso en matemáticas, estos términos y los conceptos que expresan tienen un uso coloquial y cotidiano, lo que puede generar dificultades en la comprensión de los escolares.

Primeras definiciones en el Diccionario de la Lengua Española de los conceptos de: aleatorio, azar, casualidad e imprevisto.

aleatorio, ria. (Del lat. *aleatorĭus,* propio del juego de dados).
1. adj. Perteneciente o relativo al juego de azar.
2. adj. Dependiente de algún suceso fortuito.

azar. (Del ár. hisp. **azzahr,* y este del ár. *zahr,* dado, literalmente «flores»).
1. m. Casualidad, caso fortuito.
2. m. Desgracia imprevista.

casualidad.(De *casual*).
1. f. Combinación de circunstancias que no se pueden prever ni evitar.

imprevisto, ta.
1. adj. No previsto.
2. m. pl. En la Administración, gastos con los que no se contaba y para los cuales no hay crédito habilitado.

El sentido estocástico básico se desarrolla cuando los conceptos y procedimientos designados mediante los términos anteriores se utilizan dentro de uno varios de los cinco contextos siguientes, los dos primeros conectados con la probabilidad y los tres siguientes con la estadística. Estos contextos los denominaremos componentes básicos del sentido estocástico.

1. *Identificación de situaciones aleatorias.* Aunque existen multitud de situaciones aleatorias a las que un individuo se enfrenta en su vida diaria, su identificación no es habitual, reduciéndose, en general, a considerar la aleatoriedad restringida a los juegos de azar. Un ejemplo de contexto aleatorio no relacionado con los juegos de azar consiste en la elección de los miembros de una mesa electoral, o en la predicción climatológica.
2. *Cuantificación del grado de incertidumbre* en situaciones aleatorias. Consiste en graduar la certidumbre de un suceso. Normalmente, la graduación se realiza de forma cualitativa mediante el uso de expresiones tales como «si no lo veo no lo creo», que indica una baja expectativa de ocurrencia. Por el contrario, expresiones como «¿qué te apuestas?» muestran una elevada creencia de que el suceso ocurrirá. La cuantificación de estas expresiones se realiza usando herramientas del cálculo de probabilidades.
3. *Búsqueda y obtención de datos.* Esta acción consiste en recoger y registrar datos sobre objetos, fenómenos y situaciones utilizando técnicas de encuestas, de observación o de medición. Una situación escolar que refleja esta acción se produce cuando uno de los alumnos registra cuáles de sus compañeros asistirán a su fiesta de cumpleaños y cuáles no.
4. *Resumen estadístico de la información.* Una vez se tienen disponibles los datos, se resumen mediante tablas y gráficos y se interpretan. Se incluyen aquí el cálculo de las medidas de centralización, dispersión, forma y otras, como son la media, la moda, la mediana, los cuartiles o el rango. Un ejemplo de resumen estadístico habitual es la identificación y el uso del valor de la media y los elementos atípicos, como en los ca-

© Ediciones Pirámide

sos en los que se señala a un compañero de clase como «muy alto para su edad» o «la más lista».

5. *Realizar inferencias.* La expresión de predicciones no se aborda hasta la educación secundaria. Sin embargo, durante la educación primaria se pueden hacer inferencias sencillas a partir de observaciones de tendencias en la repetición de sucesos aleatorios.

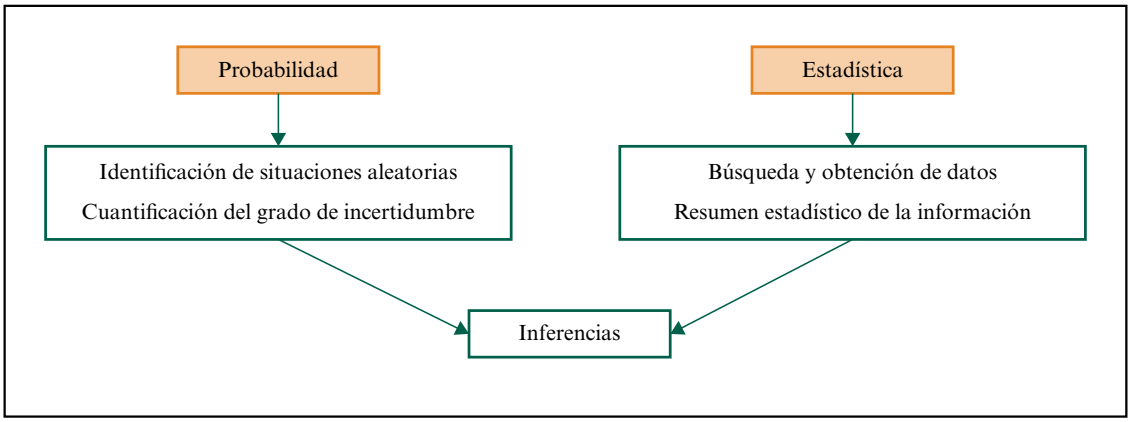


Figura 8.2.—Esquema de los componentes del sentido estocástico.

En los epígrafes 3 y 4 se desarrollan y clarifican, mediante el uso de ejemplos, estas cinco componentes que caracterizan el sentido estocástico.

1.2. Relación del sentido estocástico con otros sentidos matemáticos

La probabilidad y la estadística son los contenidos matemáticos que contribuyen a desarrollar el sentido estocástico. Cada uno de ellos establece diferentes relaciones con conocimientos de otras disciplinas matemáticas.

El análisis de datos trabaja con y a partir de números, haciendo uso de criterios de agrupamiento de números y de gráficos que los sistematizan. La relación de la probabilidad y la estadística con los números o la medida es evidente desde los primeros cursos de la educación primaria. Por otra parte, los conceptos de probabilidad están más orientados hacia matemáticas superiores. Algunas de las relaciones que se pueden establecer con otros sentidos matemáticos son:

- Con el *sentido numérico* (capítulo 5): la creación y estudio de tablas y gráficos requiere habilidades numéricas. Los gráficos contienen relaciones numéricas, como la de mayor que, menor que o diferente. La relación parte-todo aparece en el momento en el que la barra o el sector de un gráfico (parte) se observa dentro de un conjunto de datos (todo). Las fracciones y porcentajes se usan para describir los datos. Cuando se establecen las primeras nociones de probabilidad, las fracción se convierte en un elemento fundamental del estudio.

© Ediciones Pirámide

- Con el *sentido de la medida* (capítulo 7): la mayoría de los datos que se recogen del mundo físico son medidas. Es interesante tratar de combinar la medida con el análisis de datos: los escolares toman medidas con las que se obtienen datos, que, tras ser analizados, darán respuesta a las cuestiones planteadas.

2. IDENTIFICACIÓN DE SITUACIONES ALEATORIAS Y CUANTIFICACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Identificar las situaciones aleatorias y diferenciarlas de aquellas que no lo son es una primera componente del sentido estocástico.

2.1. Determinismo y aleatoriedad

El determinismo es una corriente filosófica según la cual, bajo unas circunstancias dadas, cualquier hecho está causalmente determinado mediante una cadena de relaciones de causa-efecto que no pueden modificarse, de lo cual se infiere que el estado futuro de un fenómeno es previsible, ya que está fijado por los estados que lo preceden. El determinismo expresa la convicción de que fenómenos y sucesos del mundo físico obedecen a leyes naturales, leyes que lo predeterminan y regulan, cuyo descubrimiento y estudio resultan factibles.

Ejemplo D. *Determinismo y azar*

Según el determinismo, si se lanza un dado el resultado viene determinado por su tamaño, su forma, la fuerza con la que se lanza, la gravedad, las características de la superficie sobre la que caerá..., lo cual elimina cualquier posibilidad de azar.

La noción de aleatoriedad en distintos momentos históricos se ha interpretado de formas diferentes. Incluso en la actualidad no se ha proporcionado una definición sencilla que permita precisar con nitidez si un suceso, o una secuencia de ellos, es determinista o aleatorio. En una primera acepción, por aleatorio se entiende un fenómeno cuyas causas no se conocen, y por azar la ausencia de causa de los fenómenos aleatorios.

Ejemplo E. Situaciones ligadas al azar

Situaciones que los seres humanos no pueden controlar, como por ejemplo el clima. Aunque el clima se puede predecir hasta un cierto nivel de precisión, el cambio climático transcurre de forma impredecible, por la multitud de factores y variables que lo condicionan. Según esta concepción, el azar sería algo externo, no controlable, y los fenómenos climáticos se considerarían aleatorios, al escapar a la intervención de los seres humanos; cualquier intención por modificarlos no influiría en el resultado final.

Situaciones cuyas causas no conocemos en toda su amplitud las relacionamos con el azar por motivo de este desconocimiento. Según esta concepción, el azar sería algo subjetivo, pues algunas personas sí conocen las causas y otras no. Por ejemplo, un experto puede predecir el valor del Producto Interior Bruto del próximo año de un país si dispone de la información necesaria sobre la economía nacional. Para otro ciudadano no experto, el PIB es un concepto complejo cuya percepción es que esa cantidad, aunque se mueve dentro de unos parámetros, se rige por las leyes del azar.

A efectos prácticos, consideramos como situaciones aleatorias aquellas que se caracterizan por su imprevisibilidad; aun repitiéndolas en condiciones idénticas, no se puede predecir

© Ediciones Pirámide

su resultado. Frente a éstas, las situaciones deterministas son aquellas cuyos resultados se pueden conocer e incluso predecir si son considerados en condiciones idénticas.

ACTIVIDAD 1: Analiza si todas las situaciones presentadas a continuación son de naturaleza aleatoria o no.

a) Tira tres dados, suma y anota el resultado. Realiza el experimento un gran número de veces y cuenta las veces que has obtenido el 9 y las que has logrado el 10. ¿Cuál de las dos es más frecuente? ¿Podrías saber, antes de lanzar los dados, cuál iba a ser el resultado obtenido?
b) Has olvidado realizar el trabajo de matemáticas propuesto para hoy; todos los días lo presentan dos alumnos, seleccionados por el profesor, y sólo faltan por exponer cuatro compañeros y tú. ¿Puedes tener la seguridad de que no te va a tocar hoy? ¿Y de que sí te va a tocar?
c) Tienes una moneda que lanzas 10 veces y vas anotando los resultados como una sucesión de caras (C) y cruces (X), por ejemplo, CXXXCCXXXX. ¿Te atreverías a pronosticar lo que saldría en la siguiente tirada?
d) Se ha plantado un esqueje de geranio en una maceta, se ha abonado y regado adecuadamente. ¿Puedes tener la total seguridad de que se desarrollará?

Atendiendo a la evolución de las intuiciones en los escolares, en el primer ciclo de primaria las experiencias sobre probabilidad deberían ser informales y promover la familiarización con los términos anteriormente descritos: «posible», «más probable»..., y las preguntas sobre si un suceso es más o menos probable deberían partir de las propias experiencias del escolar. Se recomiendan actividades informales con ruletas, dados o sacar fichas coloreadas de una bolsa, que refuercen los conceptos relativos a otros constructos.

Ejemplo F. Actividad de 2.º curso de Primaria en la que se reflexiona sobre sucesos aleatorios y deterministas y se asigna un valor intuitivo de probabilidad

2.2. Cuantificación de la incertidumbre

El intento de determinar numéricamente los diferentes grados de incertidumbre pretende eliminar la subjetividad que generan términos como: «muy probable», «muchas posibilidades» o «casi imposible».

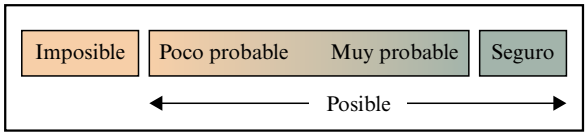


Figura 8.3.—Escala cualitativa de incertidumbre.

En los últimos cursos de la Educación Primaria se pueden realizar experimentos o se pueden considerar resultados teóricos conocidos. El inicio de la cuantificación se puede efectuar mediante el uso de la frecuencia en la recogida de datos. El uso de los ordenadores, calculadoras y demás dispositivos electrónicos permite destacar el significado frecuencialista de probabilidad.

© Ediciones Pirámide

Ejemplo G. *Actividad con dados para reflexionar sobre sucesos posibles e imposibles*

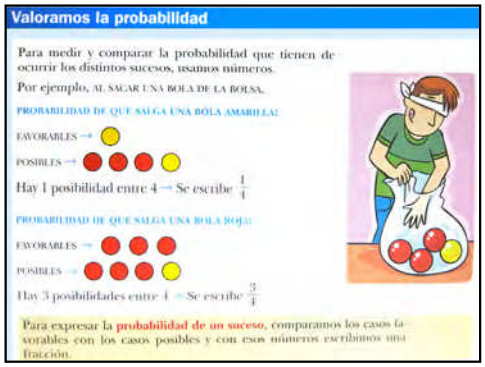
Al lanzar repetidamente dos dados y sumar cada vez los números obtenidos, los alumnos deberían llevar la cuenta de los resultados. Comprobarán que una suma igual a 1 es imposible, que es rara una suma igual a 2 o a 12, y que las sumas 6, 7 y 8 se repiten mucho. En la discusión, pueden darse cuenta que sus observaciones tienen algo que ver con el número de formas distintas de conseguir una suma determinada con dos dados, pero el cálculo exacto de la probabilidad debería dejarse para niveles superiores.

ACTIVIDAD 2: Usa la frecuencia para responder a la siguiente cuestión sobre probabilidad:

¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un anuncio cuando enciendes el televisor?

Para estimar esta probabilidad, el escolar debe recoger una estimación de datos sobre el número de minutos dedicados a estos anuncios a lo largo de una hora de emisión.

Ejemplo H. *Ejemplo de libro de 4.º Primaria en el que se trabaja la probabilidad desde un punto de vista clásico*


Valoramos la probabilidad

Para medir y comparar la probabilidad que tienen de ocurrir los distintos sucesos, usamos números.

Por ejemplo, AL SACAR UNA BOLA DE LA BOLSA.

PROBABILIDAD DE QUE SALGA UNA BOLA AMARILLA:

FAVORABLES →

POSIBLES →

Hay 1 posibilidad entre 4 → Se escribe $\frac{1}{4}$

PROBABILIDAD DE QUE SALGA UNA BOLA ROJA:

FAVORABLES →

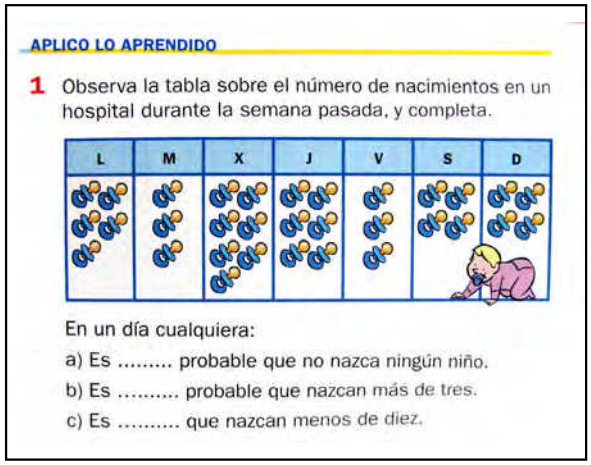
POSIBLES →

Hay 3 posibilidades entre 4 → Se escribe $\frac{3}{4}$

Para expresar la **probabilidad de un suceso**, comparamos los casos favorables con los casos posibles y con esos números escribimos una fracción.

Es importante reforzar la intuición a edad temprana, lo cual permite, por un lado, preparar al escolar para entender los conceptos probabilísticos formales y, por otro, eliminar errores que, en otro caso, podrían persistir a lo largo plazo y transformarse en dificultades de aprendizaje.

Ejemplo I. Actividad para 4.º de Primaria en la que se trabaja la concepción frecuencialista de probabilidad


APLICO LO APRENDIDO

1 Observa la tabla sobre el número de nacimientos en un hospital durante la semana pasada, y completa.

L	M	X	J	V	S	D

En un día cualquiera:

a) Es ..... probable que no nazca ningún niño.

b) Es ..... probable que nazcan más de tres.

c) Es ..... que nazcan menos de diez.

Un enfoque didáctico que aúne las concepciones clásica y frecuencial de la probabilidad facilitará el desarrollo de intuiciones probabilísticas adecuadas en los escolares. Estas pruebas y experimentaciones, aunque no puedan ser ilimitadas y, por tanto, imposibilitan que la probabilidad teórica coincida con la experimental o frecuencial, darán idea de las características de la aleatoriedad, ya que el conocimiento estocástico tiene un carácter teórico especial, y su enseñanza teórica es más difícil que otras ramas de las matemáticas.

© Ediciones Pirámide

3. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

En estadística se consideran tres facetas de estudio, que coinciden con los componentes básicos descritos en el apartado 2.1:

- *Obtención de datos.*
- *Análisis de datos.*
- *Estadística inferencial.* Su propósito es la obtención de inferencias y predicciones. La probabilidad permite comparar los conjuntos de datos reales disponibles con modelos probabilísticos «ideales» perfectamente conocidos, con intención de describir cuál debería ser el comportamiento de la realidad. Como se ha dicho, la Estadística inferencial no forma parte del currículo de Primaria y no la consideramos en este capítulo.

En general, el uso de modelos complejos hace que el estudio de la inferencia estadística no sea adecuado hasta los niveles universitarios.

3.1. Búsqueda y obtención de información

La búsqueda y recogida de datos es previa y diferente a organizarlos, representarlos mediante gráficos y realizar cálculos estadísticos con ellos. Esta fase incluye preguntas acerca del mundo en que vive el escolar; muestra cómo la recogida de datos debe tener un propósito. Las preguntas que se hacen para obtener datos de política, seguros de vida, economía, publicidad o investigaciones médicas tienen como finalidad responder a cuestiones de esos ámbitos.

En ocasiones, las preguntas planteadas en los libros de texto para trabajar la recogida de datos no pretenden dar respuesta a problemas del escolar, por lo cual no llaman su atención. Las cuestiones pueden ser propuestas por los propios escolares, lo que abre la opción de que sean ellos mismos quienes decidan sobre qué datos son más apropiados para responderlas y cuáles serán los métodos de recolección. Si son los escolares los que formulan las cuestiones de lo que realmente quieren conocer, los datos recogidos se llenan de significado. Este significado de los datos, como se vio en el apartado 2, es una de las características que diferencian el sentido estocástico en el pensamiento matemático en general.

Ejemplo J. Situación escolar de toma de datos

Cuestiones relacionadas con los intereses del escolar que se pueden usar en el aula, referidos a actidades de ocio, son: datos de programas de televisión, sobre juegos o videojuegos, datos deportivos, etc.

Otras cuestiones más relacionadas con el aula pero también interesantes para el escolar son actividades en las que haya que realizar medidas: pesos, alturas, longitud de la sombra, tiempo que se tarda en dar una vuelta a la pista deportiva del colegio, etc.

3.2. Resumen y síntesis de la información

Este análisis también es conocido como estadística descriptiva. Engloba un inventario, organización y explicación de los datos recogidos, así como su presentación e interpretación. Se debe resaltar la gran importancia que tiene «comprender» los datos y las variables que se están estudiando. En un primer momento se impone un examen de los datos y una exposición de sus principales características, con el fin de describirlos. En síntesis, para realizar este

© Ediciones Pirámide

proceso en primer lugar se deben observar los datos y reconocer las variables definidas y su tipo; a continuación se pueden identificar las representaciones gráficas más adecuadas a cada situación y representar los datos, así como determinar resúmenes numéricos adecuados y proceder a su cálculo.

La lectura e interpretación de resúmenes, tablas y gráficos aparecen en el currículo de primaria desde edades muy tempranas y ofrecen una gran oportunidad para preparar al escolar para otras materias. Así, por ejemplo, en el área Conocimiento del medio natural, social y cultural se estudian las pirámides de población (véase figura 8.4). Estas pirámides representan el reparto porcentual de la población de un país según el sexo y la edad. Permiten las comparaciones y una rápida percepción de fenómenos, como el envejecimiento de la población, el equilibrio entre sexos o incluso el efecto demográfico de catástrofes y guerras.

En clase de matemáticas de Primaria, entre los tipos de gráficos estudiados no suelen aparecer las pirámides de población, pero entre los objetivos de la enseñanza de la estadística está capacitar al escolar para interpretar y ser crítico con los gráficos que se usan en otras materias.

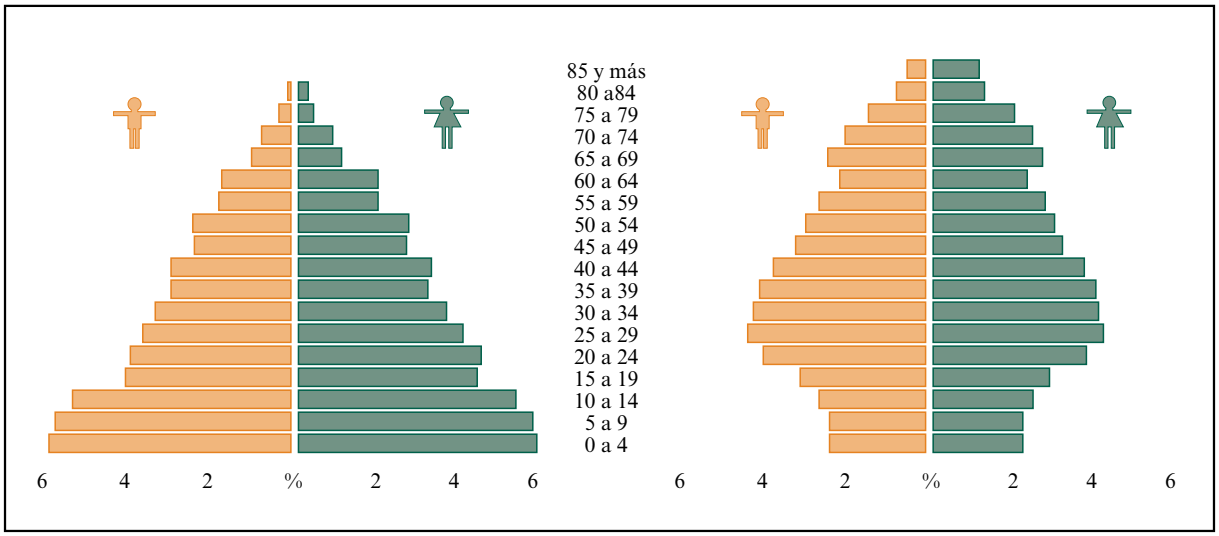


Figura 8.4.—Pirámide de la población española en 1900 y en 2001. Fuente: INE.

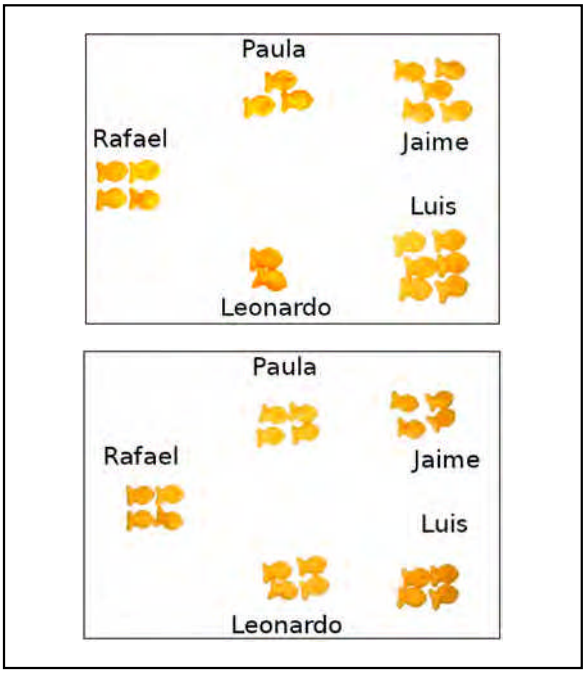
Ejemplo K. La media

Las cantidades que describen características de una distribución o conjunto de datos se conocen en estadística como medidas de esa distribución. La media es una de las más conocidas, y se utiliza en multitud de situaciones, no sólo en las clases de matemáticas: «mi nota media es 6», «este año ha llovido por debajo de la media», etc.

La forma intuitiva de aproximarse al concepto de media es como valor de la variable que todos los elementos de la población tendrían si estuviesen equilibrados. Paula, Jaime, Luis, Leonardo y Rafael tienen 3, 5, 6, 2 y 4 galletas de

© Ediciones Pirámide

pez, respectivamente. Para calcular el número medio de peces se puede pedir a los escolares que representen las galletas de pez y las repartan de manera que cada uno de los niños tenga el mismo número de galletas. Ese número es la media.



3.3. Aspectos didácticos

El hecho de que la estadística sea de aparición reciente en los currículos escolares provoca que los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de sus conceptos sean escasos.

Con respecto a los aspectos didácticos, algunos investigadores sugieren orientaciones para ayudar al escolar a desarrollar su sentido estadístico. Basándose en la elaboración de proyectos, ponen de manifiesto la importancia de las actitudes y de la actuación del escolar como protagonista de su proceso de aprendizaje. Algunas de estas recomendaciones son: involucrar al escolar en el desarrollo de proyectos sencillos donde los datos se deban recoger por diferentes medios; hacerles conscientes de la importancia del conjunto global de datos, de su tendencia y variabilidad; animar a los niños a representar datos de su interés en tablas y gráficos, cuidando las cualidades estéticas y matemáticas de los gráficos de modo que dichos datos queden correctamente representados, etc.

En el primer ciclo de Primaria, cuando se trabaja para resumir y sintetizar la información, las representaciones producidas deberían discutirse, compartirse con los compañeros de clase y valorarse, para que reflejen un nivel de comprensión apropiado.

Ejemplo L. Actividad para 1.º de Primaria en la que se trabaja el recuento como resumen de la información

Cuenta y colorea

© Ediciones Pirámide

En el segundo y tercer ciclo, al trabajar las distintas representaciones el profesor ha de tener precaución en los significados de los ejes o las escalas utilizadas, fomentando también un uso de software específico que ayude a representar datos.

En los primeros años de escolaridad los niños están más interesados en cuestiones sobre quiénes son y qué papel juegan en su entorno (en particular, en su clase). Así, se pueden proponer cuestiones acerca de sus programas de televisión favoritos, sus juegos favoritos, el número de personas que hay en su familia, su altura o el número de horas que duermen por la noche.

Según van creciendo, las relaciones sociales se amplían y las fuentes de datos pueden ser externas, como por ejemplo los periódicos o la recogida de datos fuera del ámbito escolar y familiar, como puede ser su barrio o incluso de poblaciones diferentes. Internet también es un recurso donde se pueden encontrar infinidad de datos interesantes. Como muestra, la página del Instituto Nacional de Estadística, http://www.ine.es.

Ejemplo M. Recogida de datos de otras áreas

Los datos de otras asignaturas del currículo pueden servir para trabajar la recogida de datos en matemáticas. Así, datos del mundo físico que sirvan para realizar clasificaciones mediante diferentes atributos pueden ser relativos a hojas, rocas o insectos.

---

4. EL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Los contenidos de estadística y probabilidad se han introducido en los currículos en los últimos años. Cada modificación del currículo ha supuesto, además, modificaciones en dichos contenidos. Estas actualizaciones están orientadas a dar respuesta a las necesidades de los ciudadanos, convertidos en los últimos años en usuarios de información.

En cuanto la inclusión de la estadística en el currículo, no faltan razones para ello. Entre esos motivos se encuentra la utilidad de la estadística para la vida cotidiana y la actividad profesional posterior a la escuela, pues su estudio contribuye al desarrollo personal y ayuda a comprender otros temas del currículo.

La probabilidad tiene menos presencia en el currículo, pero los contenidos relacionados también están expresados con claridad, llamando la atención sobre el carácter aleatorio de las experiencias, la identificación del azar en la vida cotidiana o la estimación y expresión del grado de probabilidad de sucesos sencillos.

El sentido estocástico se debe tratar como un conjunto integrado por hechos y contenidos probabilísticos y hechos y contenidos estadísticos. Su complejidad conceptual es importante para el desarrollo del conocimiento didáctico. Para una mejor comprensión, enseñanza y desarrollo de este singular tipo de contenidos, deben estar conectadas la enseñanza de la probabilidad y de la estadística.

Los contenidos sobre conocimiento estocástico incluidos en el currículo de Educación Primaria forman parte del bloque dedicado al tratamiento de la información, azar y probabilidad. La importancia del aprendizaje de dichos contenidos no se limita únicamente a conocerlos, sino también consiste en relacionarlos y en establecer conexiones con actividades que impliquen a otras áreas de conocimiento. De la misma forma, se debe incidir en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación. Otra faceta del currículo a destacar es apreciar el beneficio que los conocimientos estadísticos y probabilísticos proporcionan ante la toma de decisiones.

El objetivo general se resume en que el escolar desarrolle su capacidad para utilizar téc-

© Ediciones Pirámide

nicas elementales de recogida de datos con los que obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno, estructurarlos y representarlos de forma gráfica y numérica, y elaborar juicios a partir de ellos.

El documento Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000) sugiere que las capacidades que deben desarrollar los escolares en la etapa de educación obligatoria son:

- Formular preguntas que puedan abordarse con datos, y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas.
- Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos.
- Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos.
- Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

Tomando como referencia las acciones con las que se desarrolla el sentido estocástico básico y que están descritas en el epígrafe 2, se describe a continuación cómo se reflejan estas acciones en el currículo de matemáticas de Educación Primaria.

TABLA 8.1

Acciones del pensamiento estocástico en el currículo de matemáticas

Acción	Reflejo en el currículo
Identificación de situaciones aleatorias	En el primer ciclo de Primaria se procurará que el escolar sea capaz de usar correctamente expresiones como «imposible», «seguro», «posible pero no seguro», dentro de situaciones familiares a su experiencia.
Cuantificación del grado de incertidumbre en situaciones aleatorias	En el segundo ciclo, y sobre todo en el tercer ciclo de Primaria, el escolar comenzará a asignar números a estos términos para reducir o eliminar su subjetividad. Las expectativas de aprendizaje, durante la etapa 3-5, se centran en la capacidad del escolar para predecir probabilidades de experimentos sencillos y expresar esa probabilidad con un número.
Búsqueda y obtención de información	Preparar al escolar para que, partiendo de fenómenos cercanos a su experiencia, enuncie preguntas cuya respuesta necesite información cualitativa recogida con técnicas y datos elementales. En los primeros cursos de la Educación Primaria, los datos pueden ser cualitativos y familiares. Según el escolar avance de curso, se introducirán datos cuantitativos recogidos de situaciones más variadas, como encuestas, experimentos u observaciones. Al finalizar la etapa, el escolar será capaz de diseñar experimentos para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan a su conjunto.
Resumen y síntesis de la información	Durante el primer ciclo de Primaria, la recogida de datos puede hacerse considerando los atributos de los objetos y organizando información sobre ellos. Las representaciones se pueden realizar mediante dibujos de objetos concretos, o con gráficos, tales como diagramas de barras. De estas representaciones se puede realizar una lectura global.

© Ediciones Pirámide

TABLA 8.1 *(continuación)*

Acción	Reflejo en el currículo
Resumen y síntesis de la información	En el segundo y tercer ciclo se irán añadiendo otro tipo de representaciones, como diagramas de puntos, polígonos de frecuencias o diagramas de sectores. El escolar puede comenzar a identificar la distribución de los datos o las similitudes y diferencias entre conjuntos de datos. Las medidas del cálculo estadístico que se pueden incluir son las de centralización (media, moda y mediana), haciendo hincapié en su significado respecto al conjunto de datos. Para completar el estudio, se realizarán informes que respondan a las preguntas que dieron lugar al estudio.

© Ediciones Pirámide

PARTE TERCERA
Enseñanza y aprendizaje

Enseñanza y aprendizaje del número natural y del número entero

9

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
MARTA MOLINA GONZÁLEZ

Universo en expansión

Los números naturales se utilizan en situaciones de enseñanza en las que se manejan informaciones sobre cantidades enteras.

Los científicos estiman que la edad del Universo, desde el Big Bang hasta el presente, es de unos **13.700.000.000 (trece mil setecientos millones) de años**.

Medidor de liquidos

Las situaciones de enseñanza relacionadas con los racionales se centran, por lo general, en medidas de magnitudes.

Para hacer un cierto pastel es necesario utilizar **3/4 de litro de leche**.

Depresión del mar Muerto

El trabajo escolar con números enteros se apoya en informaciones sobre «posiciones» respecto a una referencia.

La depresión del mar Muerto es el punto más bajo de la Tierra. Su altitud es de **413 metros bajo el nivel del mar, o -413 m.**

ACTIVIDAD Enuncia tres tareas escolares, usando cada una de las informaciones aparecidas en la ilustración anterior.

El número es una invención humana, una herramienta conceptual cuyo uso permite dar respuesta a situaciones variadas; desde las más sencillas, como contar los dedos que hay en una mano, hasta otras mucho más complejas, como cuantificar la velocidad de la luz. La invención de los números ha evolucionado en la historia a medida de las exigencias de nuevas situaciones planteadas. Así, fundamentalmente, los números naturales (o ente-

© Ediciones Pirámide

ros positivos) surgen de la necesidad de cuantificación; por ejemplo, conocer la cantidad de habitantes de una población. Los números racionales emergen de la exigencia de expresar el resultado de una medida; por ejemplo, se dice que un objeto pesa un cuarto de kilo cuando, tomando como unidad de medida el Kg, el objeto no llega a alcanzar el peso de dicha unidad. Los números negativos se hacen necesarios cuando al delimitar una referencia es necesario referirse a la misma desde dos posiciones encontradas; por ejemplo, a un lado y al otro de un punto, por encima o por debajo del nivel del mar, etc. En este tema tratamos los números naturales y los enteros. En el tema 11 se abordarán los números racionales.

© Ediciones Pirámide

1. FOCOS DE CONTENIDO DEL TEMA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Dado que en este tema consideramos los dos tipos de números señalados anteriormente, en este apartado se recogen focos prioritarios de contenido en los que tienen cabida los dos tipos de números y algún foco específico de alguno de ellos. En todo caso, listamos los focos que consideramos más relevantes relativos al concepto de número en el currículo de Educación Primaria:

- Significados, usos y representaciones de los números naturales y de los números enteros.
- Relación de orden de los números naturales y de los números enteros.
- Sistema decimal de numeración.
- Relación de divisibilidad.

ACTIVIDAD 1: Consulta los documentos curriculares de Educación Primaria actuales e identifica los cursos en los que se trabajan contenidos relativos a cada uno de los focos anteriormente presentados.

2. OBJETIVOS DEL APRENDIZAJE

Entre los objetivos o expectativas de aprendizaje que se consideran para los escolares de Educación Primaria, en relación con este tema, destacamos los siguientes:

1. Usar los números para describir, codificar información, modelizar y resolver e inventar problemas, en situaciones diversas de la vida cotidiana.
2. Utilizar el vocabulario numérico adecuado en cada caso.
3. Conocer en qué situaciones de la vida real es pertinente el uso de los números y en cuáles no.
4. Percibir, en cada situación, el tipo de número involucrado.
5. Comprender y utilizar de forma flexible representaciones (tanto con modelos físicos como gráficos o simbólicos) de los números, y discernir la representación de los números más adecuada para cada situación.
6. Reconocer y generar representaciones equivalentes de un mismo número y adquirir criterios para seleccionar la más adecuada a una situación.

© Ediciones Pirámide

7. Comprender y utilizar la estructura conceptual del sistema de numeración decimal.
8. Desarrollar la comprensión de la magnitud relativa de los números y las estrategias para su valoración.
9. Conocer y aplicar las relaciones de orden y de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.
10. Identificar relaciones numéricas de tipo aditivo y multiplicativo a partir de la percepción de regularidades.

3. DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE

Cuando comienza la Educación Primaria, la gran mayoría de los escolares tienen un amplio conocimiento sobre los números naturales, aunque su comprensión está vinculada, en gran medida, al conteo y a relaciones aditivas. La enseñanza en la escuela ha de ampliar estos conocimientos numéricos, tarea que a veces entraña dificultades a los escolares. Describimos a continuación algunas de estas dificultades y aquellos errores más frecuentes en que incurren, relativos a los números naturales, en primer lugar, y a los números enteros, posteriormente.

3.1. Dificultades asociadas a la escritura y lectura de números naturales

En lo que corresponde a la escritura de las cifras, algunos escolares encuentran dificultad para hacer correctamente la grafía de algunos números y tienden a escribirlos de forma opuesta a la propia (a modo de una imagen especular). Por ejemplo, escriben los números **2, 3 o 5** hacia atrás, como **Ƨ, Ɛ o Ƨ**. Esta es una dificultad que se supera con el trabajo escolar y generalmente desaparece hacia los 7 años.

Los escolares que tengan poco desarrollada la relación perceptivo-motora presentarán dificultades para conectar lo que ven con lo que escriben, ya que no pueden coordinar adecuadamente su visión con los correspondientes movimientos de sus manos, por lo que les será complicado copiar números.

La escritura simbólica de números con más de una cifra, a partir de su expresión oral, presenta cierta dificultad. Por ejemplo, algunos escolares cometen errores como los siguientes: escribir sesenta y uno como 601 o ciento veintitrés como 10023. Este tipo de errores suelen ocurrir también en la lectura de números, es decir, al pasar de lo simbólico a lo verbal. Otro tipo de error es el cambio del orden de las cifras en el número, como escribir 14 en lugar de 41. Esta dificultad puede conducir posteriormente a errores en las operaciones, sobre todo cuando hay que «llevarse», como ocurre en el ejemplo de la figura 9.1, donde el estudiante cambia 72 por 27 y, por este motivo, coloca el 7 en el lugar de las unidades y el 2 «que se lleva» en el lugar de las decenas.

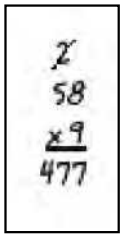


Figura 9.1.—Error de producto.

La lectura de los numerales también presenta dificultad a algunos escolares. En los números de una cifra suelen confundir algunos de ellos, como 6 y 9, o 2 y 5; esto hace que cometan errores, como el caso de la operación de

© Ediciones Pirámide

suma que se muestra en la figura 9.2, donde el estudiante que la realiza ha leído 6 en lugar de 9. En la lectura de números de dos cifras ocurre como en la escritura, que algunos escolares cambian el orden de las cifras en el número, leyendo 14 cuando en realidad se trata de 41.

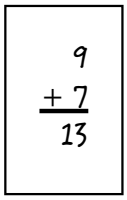


Figura 9.2.—Error de suma.

Todas estas dificultades, que pueden ser leves y superadas mediante el trabajo, hay que vigilarlas para que ningún escolar quede atrapado por ellas.

3.2. Dificultades asociadas a características del sistema decimal de numeración

En las investigaciones se han detectado diferentes grados de comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal. La capacidad de recitar la secuencia numérica no lleva implícito que los escolares posean conocimiento de la magnitud absoluta de los números, que conozcan la relación entre números de la secuencia numérica o que los reconozcan en su forma simbólica, sobre todo cuando se trata de números de más de una cifra.

En algunos casos dan muestras de percibir los dígitos de un número sólo como unidades aisladas, no reconociendo la relación entre las unidades de diferente orden. Como ejemplo, el caso de un niño que a los cinco años recita sin equivocarse la secuencia hasta 100, pero al ver en un parking dos estacionamientos con los números 89 y 90 indica: *ochenta y nueve es más grande que noventa, ¿verdad?* Cuando se le pregunta *¿por qué crees eso?,* responde: *porque en ochenta y nueve* está *el ocho y el nueve y en el noventa el nueve y el cero, que es menos que ocho.* El desconocimiento del valor de posición de las cifras de un número se muestra mediante errores de este tipo.

Una deficiente comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal provoca errores al hacer uso de los algoritmos estándar, como el que se muestra en la figura 9.3.

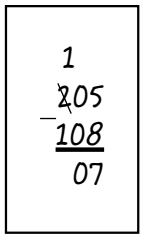


Figura 9.3.—Error de resta.

Actividad 1: Analiza la respuesta dada por un escolar en la tarea recogida en la figura 9.3, e indica dónde puede estar el origen del error mostrado.

En la lectura de números de varias cifras se presentan algunas dificultades relacionadas con las características del sistema de numeración decimal. Los números se leen de izquierda a derecha, esto es, se comienza por las unidades de mayor orden. Si el número contiene tantas cifras que no es posible leerlo a simple vista, es necesario valorarlo para conocer cuál es el orden mayor de sus cifras. Para esto se agrupan por ternas los dígitos del número de derecha a izquierda. Por ejemplo, para leer el número 136.475 se leerá inicialmente de derecha a iz-

© Ediciones Pirámide

quierda, asignándole el orden a cada dígito: unidad (5), decena (7), centena (4), unidad de millar (6), decena de millar (3) y centena de millar (1). Luego, el número se lee como se dispone de izquierda a derecha: ciento treinta y seis mil cuatrocientos setenta y cinco (figura 9.4).

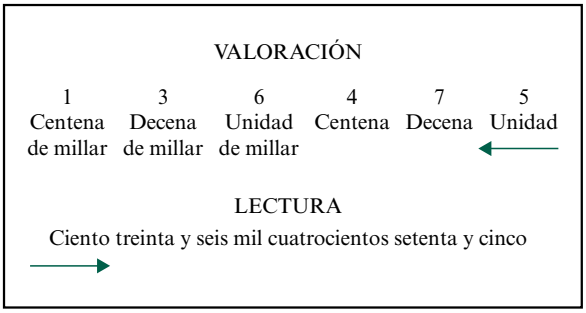


Figura 9.4.—Valoración y lectura de un número.

Este proceso puede causar dificultad, ya que al evaluar cada posición se va indicando para cada número la terna a la que pertenece (unidad de millar, decena de millar, centena de millar, en el caso de la segunda terna), y al decir todo el número la palabra mil engloba a toda la terna (ciento treinta y seis mil), es decir, la regla cambia de la valoración a la lectura.

Estudios realizados sobre esta situación han revelado que, para números de varias cifras, ofrece más dificultad escribir simbólicamente un número dado verbalmente (por ejemplo, escribir el número seiscientos cuarenta y tres mil doscientos cincuenta y siete) que leer un número que está escrito simbólicamente (decir con palabras el número 654.842).

3.3. Dificultades con el cero

De los diez dígitos del sistema de numeración decimal, el que más dificultades provoca a los escolares es el cero. Una de las causas puede estar en que, a diferencia de los nueve dígitos restantes, el cero no se percibe como cardinal de colección alguna. Otra posible causa es el doble papel de la presencia del cero en un número: para indicar que dicha posición está ocupada y para indicar que no hay ninguna cantidad de unidades de dicho orden. Esta doble función no es obvia para muchos escolares. Otro tipo de dificultad está asociada al cambio que se produce en el paso de un número terminado en nueve (o más de un nueve) al siguiente (239, 99, 2.999), que terminará en uno o varios ceros al formarse unidades de orden superior.

3.4. Dificultad sobre la relación de divisibilidad

La divisibilidad es una relación entre números que responde a una división exacta. En el aula se trabaja después de que los escolares conozcan la división, sus términos y la destreza del algoritmo. Una dificultad asociada a su aprendizaje es poder contemplarla como tal relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Esto hace que, para conocer si 7 es divisor de $3 \times 7 \times 2$, algunos estudiantes realicen los productos y dividan el resultado obtenido por 7 para comprobar si la división es o no exacta. Esta actuación se percibe también ante la simplificación de expresiones como $\frac{3 \times 7 \times 2}{7}$, para lo que realizan los productos indicados en el numerador y posteriormente dividen el número obtenido por 7. Un error frecuente asociado a la expresión de un número como producto de factores primos consiste en creer que los divisores de tal número sólo son los factores que aparecen en la descomposición factorial, los «factores visibles», no considerando que también lo son todos los números resul-

© Ediciones Pirámide

tantes de los posibles productos entre estos factores, considerando, además, las potencias a las que están elevados. Así, para el número $2^3 \times 3 \times 5^2$ indican como divisores del mismo 2, 3 y 5, solamente.

Otro tipo de dificultades que encuentran los escolares con la divisibilidad radica en el vocabulario propio de la relación. Se usan diferentes expresiones que, en algunos casos, son equivalentes y en otras indican relaciones opuestas. Por ejemplo: *divisor de, factor de, divisible por, múltiplo de.* Por otra parte, la expresión *divisor,* que en la operación de dividir es el nombre de uno de los términos de tal operación, en la divisibilidad hace referencia a un número que divide a otro (es divisor de otro); el haber utilizado durante tiempo el primer significado (al estudiar y usar la operación de dividir) dificulta la percepción del segundo significado, cuyo aprendizaje y uso es posterior. En el primer caso, además, la expresión *divisor* está ligada a la percepción espacial de la caja del algoritmo de la división; en el segundo caso no tiene sustento alguno, sino que hace referencia a la relación que hemos indicado.

ACTIVIDAD 2: Supón que en una tarea en la que se han de obtener los divisores del número 600, un estudiante da como resultado 2, 3 y 5. Indica cuál ha podido ser el motivo de su error. Añade a dicha respuesta cuatro divisores más. Explica cómo tratarías de que dicho estudiante perciba su error.

3.5. Dificultades con los números enteros

Algunas dificultades con los números enteros están asociadas al significado otorgado al signo que precede a dichos números. Hasta que los estudiantes comienzan a trabajar con los números enteros en la escuela, el signo + indica la operación de sumar y el – la operación de restar. Los signos + y –, utilizados para significar número entero positivo y negativo, indican situaciones antagónicas (opuestas) respecto de una referencia, como puede ser: + *15 €* para indicar *tener 15 euros;* o *–15 €* para indicar *deber 15 €*. No obstante, la dificultad mayor que tienen los escolares con los números negativos no está asociada a los números en sí mismos, sino a las operaciones entre ellos.

4. ETAPAS DE APRENDIZAJE DE LOS CONTENIDOS NUMÉRICOS

Recogemos a continuación descripciones de etapas en el proceso de aprendizaje que siguen los escolares, en el aprendizaje de algunos de los focos de contenido de este tema.

4.1. Los números naturales

Antes de ingresar en la escuela Primaria los escolares de nuestra sociedad han escuchado y utilizado en sus conversaciones numerales mayores que 10, por ejemplo en frases como *vivo en la calle Princesa número cuarenta y tres,* o *mi padre tiene cuarenta y tres años.* Sin embargo, es probable que no entiendan en toda su extensión el significado de la parte cuarenta y tres de dichas frases. Estos vocablos quedarán integrados en el aprendizaje posterior del recitado de la secuencia numérica. Tempranamente un niño llega a recitar la secuencia numérica hasta números elevados por repetición de pautas verbales. Posiblemente se detendrá en el cambio de decena (por ejemplo, pueden llegar a diecinueve y, después de una pausa, preguntar *¿qué viene después?),* pero continuarán cuando se les indique la palabra siguiente. También pueden llegar a tener conciencia de la magnitud abso-

© Ediciones Pirámide

luta de un número (p. ej., quince) sin tener noción de la *magnitud relativa* de un número respecto de otros (p. ej., quince y veinte).

Aunque los escolares estén familiarizados con las decenas y las unidades, de forma intuitiva, es improbable que reconozcan en 54 cinco decenas y cuatro unidades, ni puedan imaginar el «tamaño» que tiene una colección de 54 canicas. Adquirirán estas capacidades, así como la percepción del tamaño relativo de los números, a partir de experiencias sobre la apreciación de la cantidad de objetos que indican los números, lo cual, unido al trabajo sistemático de lectura y escritura de los mismos, les permitirá entender, además, la idea de valor de posición de las cifras en el número.

Durante la Educación Primaria los escolares trabajan la estructura del sistema de numeración decimal, la cual técnicamente está muy elaborada y se tardó siglos en perfeccionar. Debido a esa complejidad, los estudiantes requieren una extensa experiencia para desarrollar su comprensión y el uso flexible del sistema de numeración decimal. Entender dicho sistema implica comprender que:

- En los números mayores que nueve el valor de cada una de las cifras depende del lugar en que esté colocada en el número (por ejemplo, la cifra 2 tiene diferente valor en los números 725 y 243, mientras que tiene el mismo valor en los números 725 y 427).
- El valor de cada posición corresponde a una potencia de la base (por ejemplo, en el número de tres cifras la posición primera de la derecha o de las unidades corresponde a 10^0, que es 1; la siguiente hacia la izquierda, de las decenas, a 10^1, y la siguiente, de las centenas, a 10^2).
- Un número se puede escribir como la suma de sus cifras multiplicadas cada una por una potencia de la base, dada por la posición de la cifra (por ejemplo, $375 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 1$).

Un conocimiento flexible de la estructura del sistema de numeración decimal conlleva reconocer la existencia de múltiples descomposiciones posibles de un número. Por ejemplo, 74 consta de setenta y cuatro unidades, pero también de sesenta y cuatro unidades y una decena, de treinta y cuatro unidades y cuatro decenas, etc. En la lectura de un número, el referente se entiende que son unidades; así, 389 corresponde a 389 unidades. Cada dígito también tiene a la unidad como referente: 300 unidades, 80 unidades y 9 unidades. Pero, considerando el valor posicional de las cifras, 389 puede leerse como 3 centenas, 8 decenas y 9 unidades. Mediante esta descomposición las columnas pueden tratarse de forma individual, como ocurre, por ejemplo, en el contexto de los algoritmos estándar.

Una comprensión adecuada de la estructura del sistema de numeración decimal requiere:

- Ver un número en términos de las unidades de diferente orden que lo componen y como una colección de unidades y, por tanto, comprender el significado del valor de los dígitos.
- Entender la relación existente entre las unidades de diferente orden. La estructura es jerárquica, siendo la relación entre unidades adyacentes 10 a 1, dado que el sistema de numeración decimal utiliza la base 10.
- Agrupar y desagrupar (componer y descomponer) con flexibilidad entre unidades de diferente orden, moviéndose con fluidez entre las diferentes interpretaciones de cada unidad (véanse figuras 9.5 y 9.6). El escolar ha de ser capaz de ver 10 simultáneamente como una decena y como diez unidades, o 100 tanto como una centena como 10 decenas o 100 unidades.

© Ediciones Pirámide

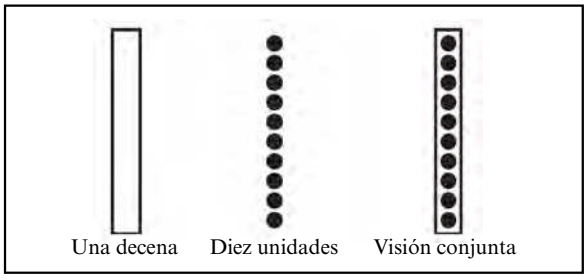


Figura 9.5.—Posibles interpretaciones de la decena.

En el desarrollo de la comprensión del valor relativo en la representación escrita de los números se pueden identificar tres fases:

1. Escribir correctamente los números, pero no conocer por qué se hace así.
2. Identificar formas incorrectas de escribir un número determinado.
3. Relacionar la notación escrita de los números con el principio del valor relativo.

El desarrollo de este conocimiento ha de hacerse gradualmente y de forma continuada, comenzando en los cursos intermedios de Educación Primaria y continuando en los cursos superiores.

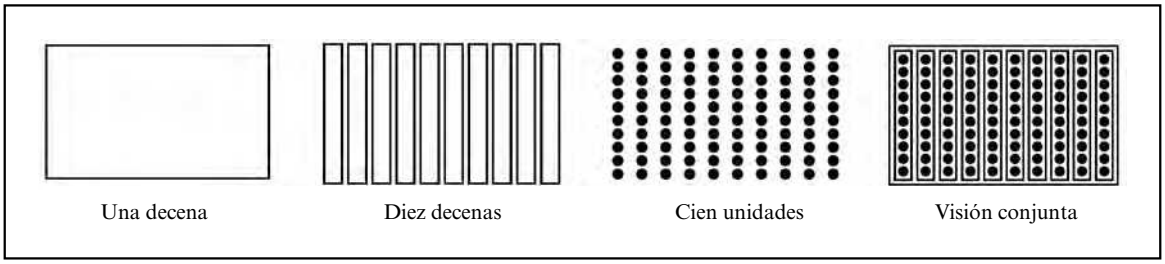


Figura 9.6.—Posibles interpretaciones de la centena.

4.2. Los números enteros

Para la comprensión de los números enteros (números con signo) es necesario un conocimiento amplio de los naturales. Además, es necesario que los escolares comprendan que los números enteros simbolizan contextos que tienen como referencia un punto de equilibrio, a partir del cual se producen dos estados relativos opuestos o contrarios.

La comprensión de situaciones con estados antagónicos se adquirirá sin necesidad de utilizar los signos, simplemente a través del vocabulario, mediantes expresiones posicionales o temporales opuestas (p. ej., derecha-izquierda; encima-debajo; antes-después), relativas a un referente. Este conocimiento es fácilmente adquirido por los escolares a una edad temprana, pudiéndose realizar tareas referidas a dichas situaciones con conocimiento de los conceptos suma y resta de los números naturales o de las relaciones de comparación entre cantidades. La introducción de los signos de los números enteros se hará posteriormente, ya que requieren de mayor desarrollo cognitivo. Los signos son necesarios tanto para la formalización del concepto de número entero como para la posterior realización de operaciones entre números enteros, sobre todo en estudios más avanzados, como en el proceso de transición de la aritmé-

© Ediciones Pirámide

tica al álgebra, donde cobra importancia el conocimiento de los números negativos y las operaciones entre ellos.

5. MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA

Este apartado lo dedicamos a presentar recursos, que son útiles en la enseñanza de los números naturales y enteros y que permiten trabajar algunos de los focos de contenido de este tema.

5.1. Material narrativo

En primer lugar mencionamos los libros de lectura infantil como recursos para trabajar contenidos relativos a los números. Por ejemplo, el libro *Ojalá no hubiera números* (Serrano, 2007) trata el papel de los números naturales en la vida diaria, distinguiendo sus diferentes significados y contextos en los que se utilizan. El libro *Apín capón zapún amanicano* (Roig y Font, 1997) permite reflexionar sobre las características del sistema de numeración decimal y algunos de los principales usos del número natural.

La utilización de cuentos y novelas con contenido matemático permite motivar al alumnado, tanto a la lectura en general como a la lectura de textos matemáticos, trabajar algunos contenidos matemáticos y fomentar una actitud positiva hacia las matemáticas. En la red se encuentran recursos literarios útiles de menor extensión, en blogs y páginas webs relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, que pueden tener una utilidad didáctica similar.

5.2. Materiales manipulativos

Los materiales manipulativos estructurados y relacionados con el número son variados. Dicha variedad tiene que ver con los tipos de números con los que se vaya a trabajar y los objetivos que se pretendan conseguir.

Para trabajar números naturales

Entre el material manipulativo estructurado, las regletas Cuisenaire o números en color pueden considerarse los más básicos. Se trata de piezas de diferente color (prismas cuadrados de un cm^2 de base) que van aumentando su longitud, de una a otra, en una unidad (pieza más pequeña). Permite que los escolares de menor edad trabajen relaciones numéricas entre los primeros números, así como las operaciones básicas.

ACTIVIDAD 1: Buscar en Internet «Regletas Cuisenaire» para ver sus colores. Relaciona el color con la longitud de las regletas. Identifica qué focos de contenido de los mencionados en este tema pueden trabajarse con este material, y en cada caso propón una actividad que sirva de ejemplo.

Existen variados materiales pensados para trabajar la estructura del sistema de numeración decimal. Los modelos sobre el concepto de base son aquellos en los que sus diferentes elementos (piezas) son proporcionales, es decir, la representación de la decena es físicamente diez veces la de la unidad, la representación de la centena es diez veces la de la decena, etc. Estos modelos se clasifican en agrupables y preagrupados. Dentro de los primeros se encuentran fichas, varillas, clips, cubos encajables o cualquier tipo de material que puede ser agrupado de diez en diez (véase figura 9.7).

Este material se recomienda para realizar actividades de agrupamiento en acciones concretas antes de pasar a la representación simbólica. Cuando los escolares realizan con facilidad las actividades de agrupar y desagrupar

© Ediciones Pirámide

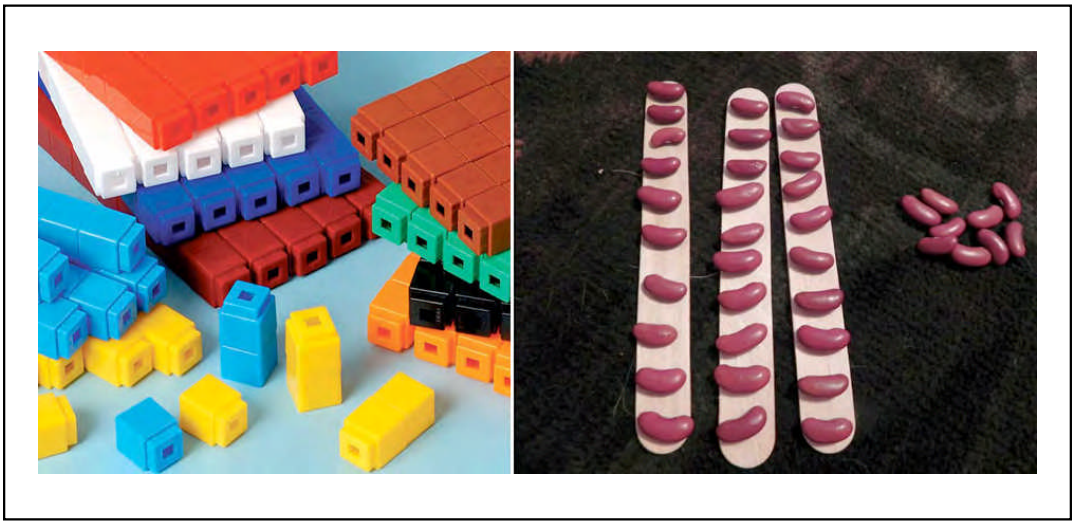


Figura 9.7.—Cubos encajables y otros materiales para la enseñanza del número.

(componer y descomponer) se puede trabajar con agrupaciones previamente preparadas, siendo éste un paso anterior al trabajo con materiales pre-agrupados.

El material pre-agrupado más frecuentemente utilizado es el material multibase (figura 9.8). Las actividades con este material no se basan en agrupar o desagrupar, sino que su acción principal es el cambio: conjuntos de diez unidades, decenas o centenas son cambiadas por una representación de la unidad de orden superior correspondiente. Este material tiene la ventaja de ser fácilmente manipulable y muy eficiente para representar números más grandes que con el material agrupable. Entre las desventajas, cabe destacar la mayor posibilidad de ser utilizado para representar números sin atribuir significado a lo que se hace, esto es, sin entender ni reflexionar sobre la relación 10 a 1 que subyace en el mismo.

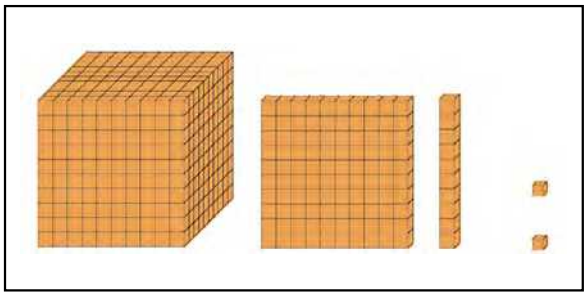


Figura 9.8.—Material multibase pre-agrupado.

También existen modelos no proporcionales, los cuales pueden ser recomendables para trabajar las operaciones cuando los escolares ya comprenden la relación que existe entre las unidades de diferente orden. Entre estos modelos se encuentran los ábacos y los billetes y monedas, en los que piezas de diferentes tamaños, formas o colores representan las unidades de diferente orden, no mostrándose físicamente la relación 10 a 1 existente. Estos materiales no proporcionales son recomendables para trabajar con cantidades de orden igual o superior a mil, debido a que se hace incómodo trabajar con los modelos proporcionales.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 2: Explica la diferencia entre modelos proporcionales y no proporcionales. Da ejemplos de ambos tipos.

El ábaco es un material estructurado, no proporcional, que se usa desde hace siglos para realizar cálculos. Una versión del ábaco para la escuela es el *ábaco vertical,* también llamado ábaco infantil. Su diseño responde a la cualidad «ser posicional» del sistema de numeración decimal. Otra versión escolar del ábaco es el *ábaco de fichas,* también llamado *tabla de valor posicional,* que puede ser usado para representar cantidades y hacer cálculos de forma manipulativa (figura 9.9). Por la simplicidad del material, puede ser construido por los propios escolares que lo usen. Los ábacos presentan representaciones de los números más abstractas que el material multibase, sin llegar a la complejidad del sistema de numeración decimal. Este material puede ser usado en la transición desde la comprensión del concepto de número a su representación simbólica, pudiendo facilitar dicho proceso.

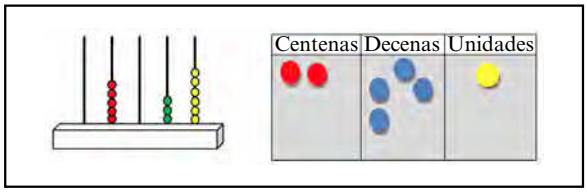


Figura 9.9.—Ábacos.

Para trabajar números enteros

Para trabajar con números enteros, existen dados (cubos) que tienen en sus caras números con signo y pueden ser utilizados en juegos en los que se trate de avanzar o retroceder, ganar o perder, etc. Una variedad de estos dados son aquéllos en donde los signos son sustituidos por colores, un color para los números positivos y otro color para los negativos.

Otro material es el círculo de números enteros, el cual consiste en un círculo que tiene representados en el borde los números enteros del –12 al 12, ordenados, y consta de una aguja que se mueve en torno al centro apuntando hacia los números (figura 9.10). Se puede utilizar

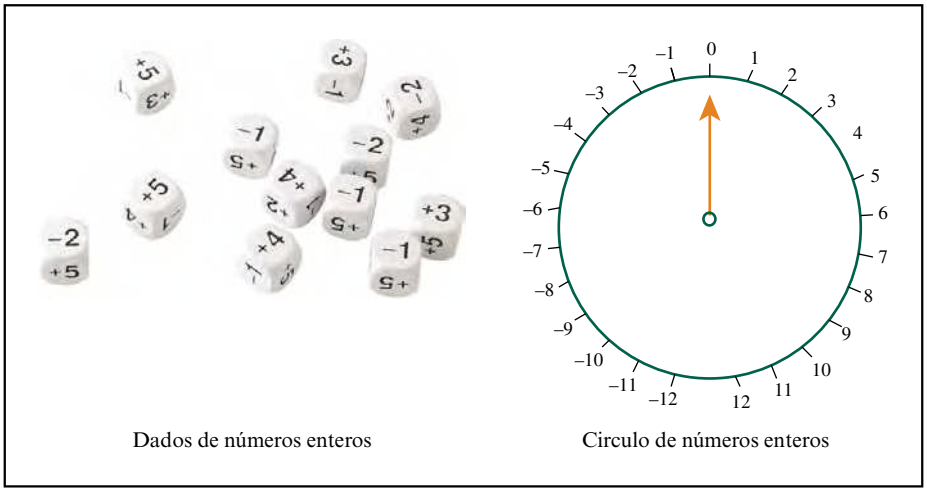


Figura 9.10.—Dados de números con signo y círculo de números enteros.

© Ediciones Pirámide

para visualizar los números desde 1 hasta 12 y sus opuestos, así como en operaciones de suma y resta cuyos resultados estén comprendidos entre 12 y –12.

ACTIVIDAD 3: Inventa un juego en el que los dados de la figura 9.10 se utilicen como herramienta para el desarrollo del mismo. Redacta las reglas del juego.

5.3. Materiales virtuales

En la actualidad hay versiones virtuales de muchos de los materiales manipulativos existentes, entre ellos las regletas Cuisenaire, ábacos y material multibase (figura 9.11). Algunas de ellas pueden encontrarse en la Biblioteca Virtual de Manipuladores Virtuales (NLVM)[1] o en la web Illuminations del NCTM[2]. Estos recursos permiten abordar el aprendizaje de los números de forma similar a los materiales manipulativos. También existen applets que posibilitan trabajar las relaciones de divisibilidad y representaciones de cantidades monetarias.

6. ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y TAREAS QUE PROMUEVEN EL APRENDIZAJE

En este apartado se recogen algunas consideraciones generales relativas a la enseñanza de los focos de contenido escogidos para este tema.

6.1. Enseñanza de los números naturales

La enseñanza de los números durante los primeros cursos de escolarización se centra en reconocer, leer y escribir los numerales (normalmente, mucho de este conocimiento es adquirido en la etapa de Educación Infantil, pero es posible que se presenten excepciones, en cuyo caso hay que atender a los escolares que llegan a Primaria sin poseer conocimientos numéricos). Se aconseja que se realicen tareas en las que los estudiantes lleguen a percibir la cardinalidad (numerosidad o cantidad) que entrañan esos números que están aprendiendo a nombrar, escribir y reconocer. Por tanto, es muy importante que en aquellas ta-

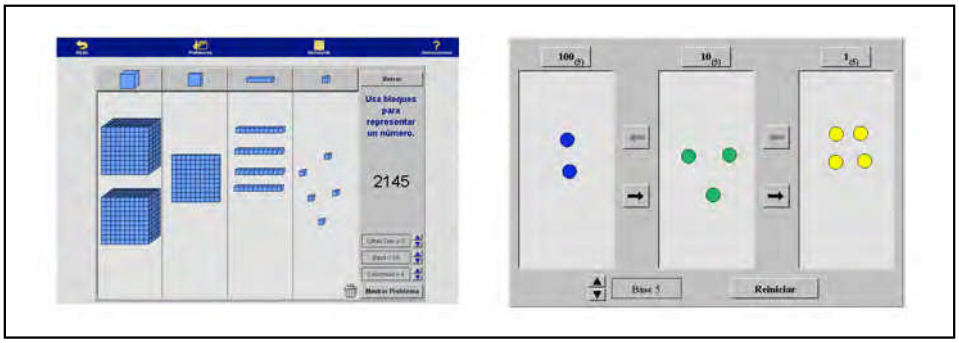


Figura 9.11.—Materiales virtuales.

[1] http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html.
[2] http://illuminations.nctm.org/.

© Ediciones Pirámide

reas destinadas al aprendizaje de los primeros números, cuando se nombren o escriban los numerales, se representen con objetos. Por ejemplo, si se canta la canción de los «elefantes que se balancean en la tela de una araña» se va indicando con los dedos de la mano el número que menciona la canción en cada estrofa. Realizar juegos en los que sea necesario el uso de uno o varios dados permite ver la cantidad de puntos asociada a los seis primeros números naturales, así como operar con esos mismos números, en el caso de usar dos dados. El uso de las regletas, asociar cada número con la longitud de la regleta permite ver la cantidad de longitud que representan los diez primeros números.

La secuencia numérica

En lo que al conocimiento de la secuencia numérica se refiere, el recitado verbal de la misma es anterior al reconocimiento de la expresión simbólica de los números, a lo que sigue la capacidad de escribir los símbolos. Por lo general se trabajan en primer curso los dígitos y las decenas (números de 0 a 99); en segundo curso las centenas (números de 0 a 999); en tercer curso el millar y decenas de millar (números de 0 a 99.999), y en cuarto curso hasta el millón.

Se aconseja que los escolares realicen tareas que impliquen las siguientes acciones:

I) Leer y escribir números de más de una cifra, para lo que se les puede proponer escribir los números comprendidos entre dos dados.

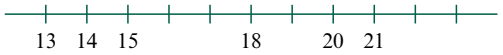
Ejemplo I.

Escribir todos los números que hay entre 21 y 37; escribir los diez números que aparecen a continuación de 37.

II) Hacer representaciones de números en la recta real. Se les pueden proponer diferentes actuaciones: escribir series de dos en dos, de tres en tres, o tareas como las que se muestran en el ejemplo II.

Ejemplo II.

Escribir el número que falta en las marcas de la recta



III) Escribir números que cumplan cierta condición. Por ejemplo, los números anterior y siguiente de otros dados, números comprendidos entre otros dos, números con determinadas cifras en la unidad de algún orden, etc. Los números serán de diferente magnitud dependiendo del nivel educativo de los estudiantes.

Ejemplo III.

Entre los números 3.167, 6.236, 60.902, 62.430, 96.002, señala los que cumplen a la vez las dos condiciones siguientes: la cifra de las decenas de millar es 6, y la suma de sus cifras es 17.

IV) Dadas varias cifras, formar con ellas números que cumplan determinadas condiciones.

Ejemplo IV.

Dadas las cifras 4, 0, 5, 1, 7, forma con ellas el mayor y el menor número posible; escribe todos los números diferentes que se pueden formar con las cifras 3, 3, 3, 3, 5, y en cada uno de los números que has formado indica el valor de la cifra 5.

© Ediciones Pirámide

V) Identificar valores de una cifra en números dados.

Ejemplo V.

Indica en cuáles de los números 3, 738, 2.370, 33.632, 7.362, 3.033, la cifra 3 vale 300; escribe cuatro números distintos, con la condición de que la cifra 2 tenga el mismo valor en todos ellos.

VI) Nombrar una misma cantidad de formas diferentes, lo que contribuirá a comprender las reglas del sistema de numeración decimal. En relación con el valor de posición de las cifras, en un número debe promoverse un aprendizaje que no sea superficial, no limitándose a distinguir el lugar que ocupa cada cifra en el número. Un aprendizaje superficial favorece que los escolares conozcan que, en 7.200, el 7 está en el lugar de las unidades de millar y el 2 en el de las centenas, no leyendo 7.200 como 720 decenas, 72 centenas o 7,2 unidades de millar.

Los estudiantes que pueden recitar la secuencia hasta 50 y pueden establecer correspondencia de uno en uno para números mayores que 10 están preparados para realizar experiencias con materiales multibase. Las actividades que siguen pueden ser usadas como preparación o refuerzo en este sentido.

Ejemplo VI.

Trabajo en parejas. Material necesario: bloques multibase y tablero (el tablero puede ser un folio), separado en regiones por líneas verticales (la región de las unidades, la de las decenas y la de las centenas). Realización: un estudiante dice un número y su par ha de representarlo con el material. Una variante es que el estudiante representa el número y el par escriba el número representado.

Ejemplo VII.

Trabajo en parejas. Material necesario: dados, bloques multibase y tablero. Realización: *a*) Un estudiante lanza dos dados, mientras que el otro ha de escribir en su libreta el número suma de los puntos de los dos dados y representarlo en el tablero con el material. Por ejemplo, si obtiene 12 puntos ha de poner dos elementos en la columna de las unidades y un elemento en la columna de las decenas (figura 9.12). *b*) Un estudiante pone un número de dos o tres cifras en su libreta, y lo representa con los bloques. A continuación otro estudiante tira tres dados, y después ha de restar el número obtenido de la suma de las tres puntuaciones al número propuesto inicialmente. Para ello deberá descomponer y componer piezas del material multibase según sea necesario.

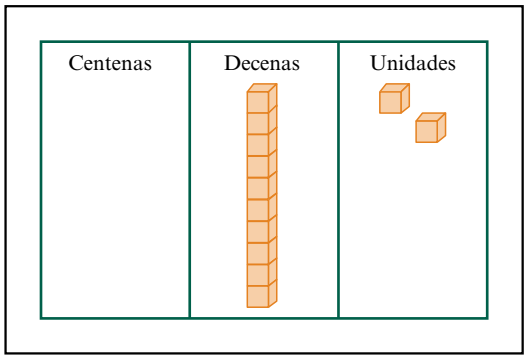


Figura 9.12.—Doce representado con bloques multibase.

Actividades de este tipo pueden promover en los escolares la relación entre la acción concreta del material y la representación simbóli-

© Ediciones Pirámide

ca de los números que con el material se manejan.

Agrupamiento y la idea de base

Ayudar a los estudiantes a entender el sistema de numeración decimal requiere que el reagrupamiento tenga sentido para ellos. Es necesario dar tiempo a los estudiantes para alcanzar plenamente las ideas de agrupamiento. La idea de base, característica esencial del sistema de numeración decimal, debe comenzar a trabajarse desde muy temprano a partir del conteo y comparación de colecciones. La comparación de cantidades, tales como las que se muestran en la figura 9.13, permiten introducir en el aula la discusión sobre cómo la agrupación de 10 en 10 facilita el conteo y organización de cantidades grandes.

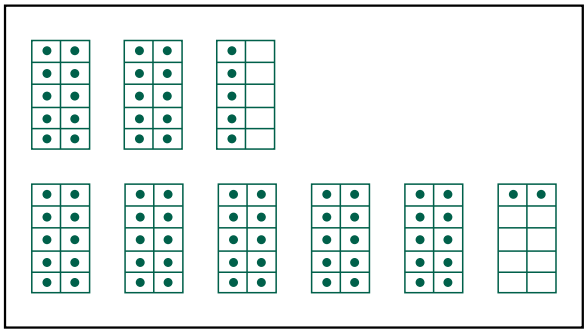


Figura 9.13.—Comparación de las cantidades 25 y 52.

El material hay que abandonarlo una vez que los estudiantes se manejen bien usando únicamente los numerales. Se pasará entonces a hacer tareas de lápiz y papel. Una de las primeras tareas a realizar con los escolares para ayudarles a considerar grupos de objetos de forma global es el conteo de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, etc. Considerar como un objeto algo que está compuesto por varios es un paso importante que requiere la atención del maestro y que resulta clave en la comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal. Los juegos de canjeo de dinero simulando la actividad de un banco son útiles para trabajar la agrupación de diez en diez. El recuento de una votación agrupando los votos como indica la figura 9.14 proporciona una situación para el trabajo con agrupamientos de cinco en cinco.

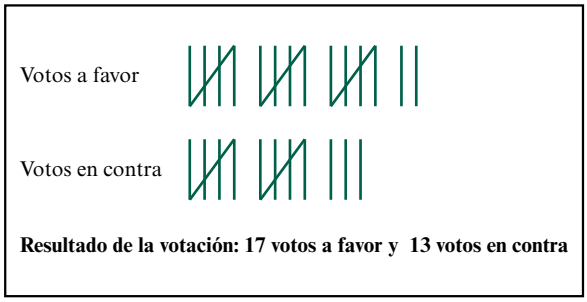


Figura 9.14.—Recuentos.

Los algoritmos

El trabajo de los algoritmos se puede presentar mediante representaciones simbólicas de acciones que suceden en el mundo real o físico, complementándose las tareas de lápiz y papel con el trabajo con materiales concretos para establecer vínculos entre ambos que den significado a cada uno de los pasos.

6.2. Enseñanza de los números enteros

Casi diariamente los estudiantes tienen alguna interacción con situaciones que pueden ser modelizadas mediante el uso de números negativos. Por ejemplo, una pérdida de dinero, la desaceleración de un vehículo, temperaturas negativas o el descenso de varias plantas en un

© Ediciones Pirámide

ascensor. Estas situaciones son cuantificables, tienen un origen y la posibilidad de dos situaciones antagónicas, lo que permite asignarles valores positivos y negativos. Como en el caso de otros conjuntos numéricos, el uso de modelos es recomendable para iniciar el estudio de los números enteros. Todas aquellas situaciones que se pueden modelizar mediantes números enteros, y que dan lugar a enunciados de problemas escolares, pueden ser tratadas sin el uso de dichos números, por lo que es aconsejable que se trabajen inicialmente y se resuelvan con los conocimientos asociados a los naturales, y posteriormente se haga una introducción de los números con signo a través de dichas situaciones. Por ejemplo, situaciones como la siguiente pueden resolverse mediante un esquema (dibujo) o una operación de suma sin necesidad de usar números con signo: *Un ascensor que estaba en el sótano dos de un edificio ha llegado a la planta quinta. ¿Cuántas plantas ha subido?* o *La temperatura de una ciudad ha subido 15.º desde la mañana a la tarde. Si por la tarde la temperatura es de 17.º, ¿cuál era la temperatura por la mañana?*

Algunas investigaciones recomiendan introducir los números negativos como opuestos de los naturales, dando así lugar al conjunto de los números enteros. Esta extensión de la recta numérica (figura 9.15) ayuda a la comprensión de la necesidad de incorporar nuevos números a la izquierda del cero.

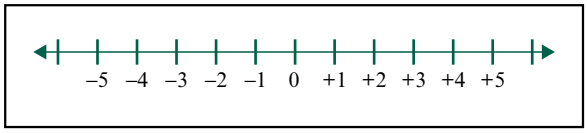


Figura 9.15.—Recta numérica.

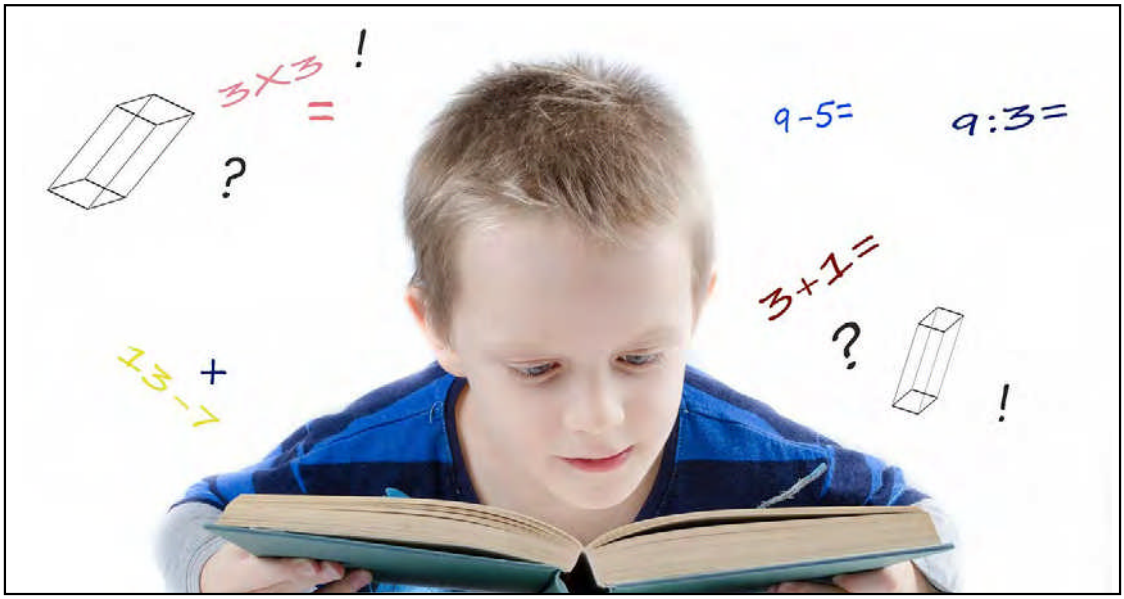
La noción de opuesto será también de gran utilidad para dar significado a las operaciones con números enteros, objetivo a tratar posteriormente en la Educación Secundaria.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de las estructuras ariméticas

10

PABLO FLORES MARTÍNEZ
ELENA CASTRO RODRÍGUEZ
JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ PLAZA



El aprendizaje del cálculo aritmético es uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. Son numerosos los problemas científicos, profesionales y sociales que están relacionados con el cálculo aritmético, y a los que se puede dar una respuesta más sencilla cuando se aprenden las operaciones. Empleando operaciones se identifican problemas aplicados a situaciones diferentes, con datos diferentes y de distinta naturaleza, pero con cierta estructura común. En el libro *Matemáticas para maestros* se han estudiado anteriormente diferentes situaciones que dan origen a problemas aditivos y multiplicativos (Segovia y Rico, 2011). Los análisis semánticos de los enunciados de estos problemas llevan a establecer tipologías de problemas que corresponden con las diversas estructuras aritméticas (aditiva y multiplicativa) de los números naturales. El dominio del cálculo permite identificar como similares problemas de cambio, por ejemplo, pese a que sean diferentes sus datos y la situación.

En este tema se analizan aspectos didácticos de la enseñanza de las operaciones. Parte de considerar que, aunque aumente el grado de com-

© Ediciones Pirámide

plejidad, la enseñanza de los problemas de suma y resta tiene que ser conjunta, por ajustarse a una misma estructura, cuya diferencia está en la posición de la incógnita. Igualmente, los llamados problemas de multiplicación o división responden a una misma estructura y se pueden introducir de manera conjunta. De esta forma se podrán estudiar problemas directos (adición o multiplicación) a la vez que sus respectivos inversos (resta y división).

Este tema tiene dos partes, según la estructura matemática abordada: aprendizaje de la suma y resta, en la estructura aditiva, y aprendizaje de la multiplicación y división, en la estructura multiplicativa. Cada una de estas partes consta de dos apartados: el estudio de las dificultades de aprendizaje y los errores, y las etapas consideradas en dicho aprendizaje.

El esquema general de las etapas de aprendizaje comprende dos fases, una conceptual, cuya intención es familiarizar a los estudiantes con el concepto de la operación, y otra procedimental, centrada en desarrollar sus estrategias y hábitos de cálculo. Las dos tienen la finalidad de crear y afianzar herramientas para resolver problemas.

La fase conceptual abarca la actuación directa, con elementos concretos (acción), el uso de modelos y la simbolización. La fase procedimental o de cálculo se centra en el aprendizaje y manejo de hechos numéricos aislados y formando tablas, la creación y memorización de algoritmos y su aplicación en la resolución de problemas (figura 10.1).

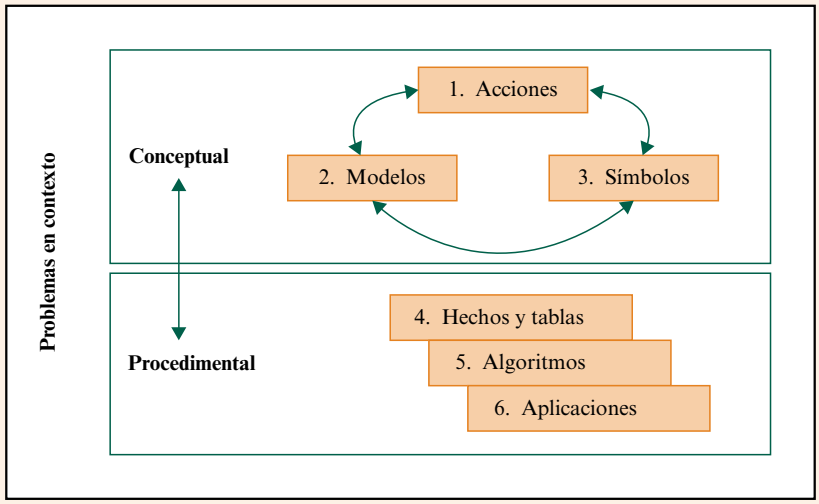


Figura 10.1.—Esquema de la enseñanza y aprendizaje de las operaciones aritméticas.

© Ediciones Pirámide

1. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTRUCTURA ADITIVA

En las matemáticas escolares, se denomina estructura aritmética a un conjunto de números en los que hay definidas operaciones aritméticas ligadas por una relación de reciprocidad, operaciones que verifican unas propiedades, y un campo de problemas que se abordan y resuelven mediante las mismas. En la aritmética de los números naturales destacan dos estructuras:

- Estructura aditiva: operaciones de suma y resta con números naturales, sus propiedades y el campo de problemas que resuelven.
- Estructura multiplicativa: operaciones de producto y división con números naturales, sus propiedades y el campo de problemas que resuelven.

Las nociones ligadas a la estructura aditiva se trabajan en la escuela de forma gradual durante la etapa de Educación Primaria. Se introducen en el currículo de Educación Primaria en el primer ciclo, a través de su empleo en situaciones familiares en las que se realiza algún tipo de acción manipulativa, tal como juntar, añadir, separar o quitar. Partiendo de las estrategias informales manipulativas que ya poseen los escolares cuando ingresan en la etapa de Primaria, se les debe conducir hacia el empleo de estrategias o procedimientos más formales de carácter simbólico y algorítmico. A través de estas acciones se puede aprender de manera simultánea el significado de las operaciones de adición y sustracción, así como los hechos numéricos básicos requeridos para resolver problemas que involucran estos significados de las operaciones.

Las ideas anteriores están recogidas en documentos curriculares de nivel internacional. También en propuestas y materiales de nuestro grupo de trabajo, con los que se introducen la adición y la sustracción antes de la Educación Primaria a través del recuento y comparación de conjuntos con un máximo de nueve elementos. Se continúa su estudio en Primaria de forma progresiva, poniendo énfasis en la resolución de problemas que involucren situaciones de añadir, reunir, quitar, separar y comparar. Para la resolución de problemas es importante el uso de distintas estrategias y situaciones que involucren adiciones y sustracciones de cantidades en distintas magnitudes, como la longitud, el tiempo, el dinero, la capacidad o el peso.

© Ediciones Pirámide

1.1. Etapas en el aprendizaje de la estructura aditiva

Siguiendo el esquema del aprendizaje y enseñanza de las operaciones de la figura 10.1, establecemos etapas en la enseñanza para que los alumnos aprendan las operaciones aditivas. Aunque se comience por indicar cómo llevar a cabo las fases del aprendizaje de las operaciones, y posteriormente se traten los problemas aditivos, esto no significa que haya que trabajarlos por separado. Cada proceso de aprendizaje debe ir acompañado de situaciones contextualizadas, en las que las operaciones respondan a acciones.

1.2. Acciones

Hay multitud de acciones que dan sentido a las operaciones aditivas: agregar, acumular, ampliar, añadir, aumentar, dar, disminuir, ingresar, quitar, recibir, reducir, regalar, retirar o reunir son algunas de ellas. Estas acciones son muy elementales y los niños entran en contacto con ellas desde una edad temprana, por lo que se pueden usar en combinación con otras tareas sobre el número.

No es posible asociar íntegramente una acción a una sola operación aritmética. Una misma acción puede dar lugar a una adición o una sustracción, por lo que es importante trabajarla con los alumnos en ambos casos. Pongamos como ejemplo *añadir,* y pensemos en una situación que se pueda resolver con una adición (si tengo dos aceitunas en mi plato y añado dos más, ¿cuántas aceitunas tengo?), o con una sustracción (si tengo dos aceitunas en mi plato y necesito 10, ¿cuántas aceitunas tengo que añadir?).

1.3. Modelos

Simultáneamente a las acciones, se afrontan enunciados y se resuelven problemas, generando estrategias que se adaptan a las características de cada problema. Estas estrategias evolucionan, comenzando con objetos o dedos, pasando después a realizarlas sin ellos a través de representaciones de objetos (modelos), para llegar al conteo mental, la memorización y deducción de hechos numéricos básicos. Sólo a una cierta edad, que puede ser variable, se hacen intercambiables dichas estrategias, pudiendo aplicarlas a cualquier tipo de problema. En ese momento se puede afirmar que se ha llegado a unificar la idea de suma y resta.

Aunque la mayoría de los niños en Educación Primaria dominan estas estrategias, en la figura 10.2 describimos algunas de las estrategias de conteo con objetos o dedos para resolver problemas aditivos.

También se utilizan estrategias de conteo sin objetos o dedos. Por ejemplo, para la sustracción partiendo del sustraendo se cuenta hacia delante hasta llegar al minuendo, a la vez que se lleva la cuenta del número de unidades avanzadas.

1.4. Símbolos

Un nivel más avanzado en abstracción a la utilización de modelos manipulativos es la utilización de signos en la adición y sustracción. La notación simbólica, como por ejemplo $5 + 2$, permite representar acciones y resolver problemas que involucren una suma de 5 y 2 elementos. Sólo cuando las representaciones simbólicas sugieran acciones para actuar con objetos o modelos, los alumnos estarán en condiciones de usarlas y ejercitarlas de manera exclusivamente simbólica.

1.5. Hechos numéricos y tablas

Hecho numérico es una relación básica entre números relativa a una determinada operación, que el alumno debe memorizar y recuperar

© Ediciones Pirámide

Estrategias de conteo con objetos o dedos

Estrategias aditivas

Ejemplo: Tengo 3 caramelos y me regalan 4 más, ¿cuántos caramelos tengo al final?

Contar todo

Se colocan 3 objetos o dedos.

1 2 3

Añade 4 objetos, la otra cantidad.

1 2 3 1 2 3 4

Se cuentan todos los objetos.

1 2 3 4 5 6 7

Partir del primer sumando

Representa el primer sumado con objetos

3

y cuenta a partir de ese número, evitando contar los tres primeros.

4 5 6 7

Partir del sumando mayor

Identifica el sumando mayor y lo representa con objetos

4

y cuenta a partir de ese número.

5 6 7

Exige una comprensión intuitiva de la propiedad conmutativa.

Estrategias sustractivas

Ejemplo: Tengo 7 canicas y pierdo 4, ¿cuántas canicas me quedan?

Quitar

Se colocan 7 objetos o dedos.

1 2 3 4 5 6 7

Se seleccionan 4, que se pierden.

1 2 3 4

Se cuentan todos los objetos.

1 2 3

De adición

Se representa el sustraendo,

4

se añade el minuendo y se cuentan los objetos añadidos.

1 2 3 4 5 6 7

1 2 3

Emparejamiento

Coloca en dos filas paralelas minuendo y sustraendo,

y cuenta los objetos de la fila más grande no emparejados.

1 2 3

Figura 10.2.—Estrategias empleando modelos.

© Ediciones Pirámide

cuando tiene que realizar la operación. Por ejemplo, 3 + 2 = 5 es un hecho numérico que hay que conocer para realizar la suma 553 + + 1.542. Este conocimiento se logra mediante el descubrimiento, la experiencia y la memorización de algunos resultados usuales. Algunos de los hechos numéricos aditivos más comunes aparecen en la figura 10.3.

Hechos numéricos de suma

- Número siguiente y anterior a uno dado (n + 1, 1 + n): 5 + 1, 11 + 1, 1 + 7, 1 + 3... Trabajar con actividades de conteo.
- Los dobles, dobles + 1, dobles – 1, dobles + 2, dobles – 2: a partir de juegos como parchís y oca (avanza el doble de lo que marque el dado, el doble menos uno, etc.).
- Sumas que totalicen 10: 7 + 3, 6 + 4, etc. Juegos de cartas (escoba) o dados para memorizar la descomposición del 10.
- Analogías: si 2 + 4 = 6, entonces 20 + 40 = 60... Si 7 + 2 = 9, entonces 17 + 2 = 19. Requiere un manejo al menos intuitivo de la serie numérica y la suma.

Hechos numéricos de resta

- Anteriores, anterior del anterior ($n - 1$, $n - 2$): 5 – 1, 8 – 1, 7 – 2... Actividades de contar hacia atrás.
- Complementación de la suma: 5 – 3 = 2 se puede interpretar como «hallar el número que, sumado a 3, nos da 5».

Figura 10.3.—Algunos de los hechos numéricos aditivos más comunes.

ACTIVIDAD 1: Partiendo de la memorización de los dobles, se pueden proponer actividades con juegos tradicionales como el parchís o la oca, donde cada jugador avanza el doble del número indicado en la tirada, usando un dado o dos. Inventa una actividad que fomente la memorización del hecho numérico aditivo «analogías», y otra para el hecho sustractivo «complementación de la suma».

Las tablas de la suma y la resta agrupan los hechos numéricos aditivos y sustractivos de manera sistemática. Un ejemplo de tablas son las tablas pitagóricas. En ellas, la primera fila y la primera columna contienen los números que se van a sumar o restar, y en la intersección de cada fila con cada columna se muestra la suma o resta de ambos números.

Para construir la tabla pitagórica de la suma sólo se requiere la destreza de saber contar hasta 18. Para ello, se realiza una tabla de 10 filas y 10 columnas, y se escriben en la primera fila y columna los números del 1 al 9 de forma consecutiva. Se continúa completando las casillas restantes por filas o columnas, contando desde el número que aparece en la primera casilla de la fila o columna (véase figura 10.4).

ACTIVIDAD 2: Realiza la tabla pitagórica de la resta y describe el proceso a seguir para su construcción.

En el caso de que el alumno tenga memorizados estos hechos numéricos aditivos o sustractivos, la realización de las tablas pitagóricas le llevará a organizarlos, a buscar otros nuevos y a encontrar regularidades visuales para apreciar propiedades numéricas.

© Ediciones Pirámide

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

–	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0								
2	1	0							
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Figura 10.4.—Tablas pitagóricas de la suma y la resta.

1.6. Algoritmos

El conocimiento de algunos hechos numéricos, destrezas y reglas básicas capacitan al escolar para hallar el resultado de la suma y resta de dos números cualesquiera, dando paso a la quinta etapa, el aprendizaje de procedimientos sistemáticos para obtener la suma y la resta de números de varios dígitos. En el libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* se detallan algunos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de los algoritmos tradicionales. Siguiendo la noción de sentido numérico (capítulo 4), es recomendable proporcionar oportunidades para el aprendizaje de estos procedimientos mediante vías que los escolares sean capaces de comprender y utilizar con sentido.

1.7. Resolución de problemas aditivos

La sexta etapa de aprendizaje supone la aplicación de estas operaciones a la vida cotidiana para la resolución de problemas. Recordemos que los problemas se introducen desde la primera etapa de Primaria, acompañando en cada una de ellas a las operaciones para darles sentido. En la última etapa se plantean y resuelven problemas de manera más sistemática, cuidando que las oportunidades de aprendizaje cubran todos los tipos de problemas correspondientes a cada operación, tomando en cuenta sus grados de dificultad correspondientes. Es conveniente repasar los tipos semánticos de problemas aditivos, tratados en el libro ya mencionado (Segovia y Rico, 2011, capítulo 3).

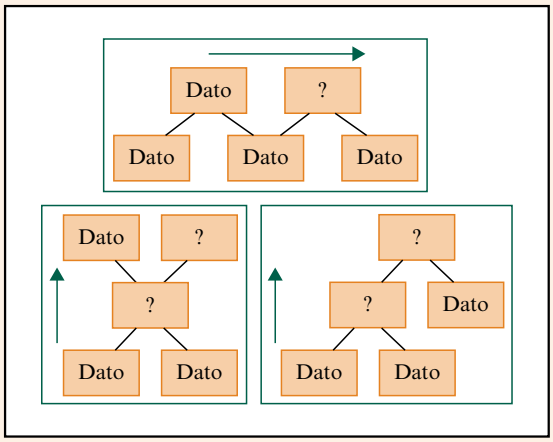
El estudio de la estructura aditiva no culmina con el dominio de los problemas de una etapa. Cuando el escolar domina estos problemas, se introducen problemas aditivos de dos o más etapas, que presentan mayor complejidad matemática. La estructura de un problema de dos etapas consta de dos relaciones numéricas que comparten una cantidad, que sirve de enlace entre las dos relaciones. Es decir, se identifica una cantidad desconocida en la primera relación, que hay que determinar en una primera etapa, para poder operar con ella en la segunda relación. La utilización de esquemas para dichos problemas facilita la comprensión de la relación entre los datos y la incógnita, además de tenerlos organizados para determinar qué operación realizar en cada etapa.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 3: Tres ejemplos de problemas de dos etapas son:

- Todo compartido: comparten el todo las dos relaciones. Relación 1 aumento, relación 2 disminución. «Juan tiene 18 bolas rojas y 7 negras, pero pierde 11 jugando en el recreo. ¿Cuántas bolas le quedan a Juan?».
- Jerárquico: El todo de la primera relación es una parte de la segunda relación. Relación 1 aumento, relación 2 aumento. «Elena tiene 7 sellos de Francia y 6 de España. Si compra 3 sellos de Grecia, ¿cuántos sellos tiene en total?».
- Parte compartida: comparten una parte las dos relaciones. Relación 1 disminución, relación 2 aumento. «Marina tiene 12 caramelos de fresa y menta, 7 son de menta. Le regalan 4 caramelos de fresa. ¿Cuántos caramelos de fresa tiene Marina?».

¿Cuáles de los siguientes esquemas se corresponden con cada uno de los problemas anteriores? Completa en cada casilla el dato que le corresponda.



ACTIVIDAD 4: Inventa enunciados de problemas aditivos de dos etapas. Analiza dichos problemas, apreciando el significado de la operación y realizando un esquema para cada uno.

2. DIFICULTADES Y ERRORES EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES ADITIVAS

Las dificultades principales en el aprendizaje de las operaciones aditivas se pueden agrupar de acuerdo con las siguientes categorías: *a*) dificultades ligadas al contenido matemático, *b*) dificultades cognitivas ligadas al alumno y *c*) dificultades relacionadas con la enseñanza.

2.1. Dificultades ligadas al contenido matemático

Las dificultades ligadas al contenido matemático se refieren a los conceptos y procedimientos de las operaciones aditivas, y se ponen de manifiesto en su aplicación a la resolución de problemas. Dentro de ellas distinguimos las dificultades relativas a la comprensión del problema, y las dificultades en la ejecución de la estrategia que se sigue y en la que hay que emplear algún procedimiento de cálculo.

La complejidad de la comprensión de los problemas aritméticos está ligada a una diversidad de variables, tanto de carácter sintáctico como semántico, que influyen en la dificultad de comprensión de los problemas. Una de estas variables es el número de relaciones presentes en el enunciado del problema, lo que lleva a distinguir la dificultad de resolver problemas de una o varias etapas, pero también a tomar en consideración otros componentes, como la longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman, la posición de la pregunta, el tamaño y tipo de los números que aparecen en los datos o la familiaridad con las situaciones planteadas. En un problema de una etapa, el tipo de categoría semántica al que pertenece, así como la posición de la incógnita, son las dos fuentes prin-

© Ediciones Pirámide

cipales de dificultad. La tabla 10.1 recoge los niveles en orden de dificultad creciente, avalados por la investigación, que tiene en cuenta esas dos variables, constituyendo una guía para seleccionar los problemas adecuados a cada nivel cognitivo.

TABLA 10.1

Orden de dificultad de los tipos de problemas aditivos

Tipo	Ejemplo	Orden
Combinación, con la incógnita en el todo	*Tengo 6 caramelos de menta y 3 de fresa. ¿Cuántos caramelos tengo en total?*	1
Cambio de aumento, con la incógnita en la cantidad final	*Juan tenía 4 cromos. Gana 3. ¿Cuántos tiene ahora?*	1
Cambio de disminución, con la incógnita en la cantidad final	*Juan tenía 4 cromos. Pierde 3. ¿Cuántos le quedan?*	1
Cambio de aumento, con la incógnita en la transformación	*Juan tenía 5 cromos. Después de jugar una partida tiene 8 cromos. ¿Cuántos cromos ha ganado?*	2
Cambio de disminución, con la incógnita en la transformación	*Juan tenía 7 cromos. Después de jugar una partida tiene 3 cromos. ¿Cuántos ha perdido?*	2
Combinación con la incógnita en una parte	*Tengo 6 caramelos, 4 son de menta y los demás de fresa. ¿Cuántos caramelos tengo de fresa?*	3
Cambio de aumento, con la incógnita en la cantidad inicial	*Juan tenía cromos. Después de darle 2 tiene 5 cromos. ¿Cuántos tenía antes?*	3
Cambio de disminución, con la incógnita en la cantidad inicial	*Juan ha perdido 5 cromos. Ahora tiene 3. ¿Cuántos tenía antes de empezar a jugar?*	3
Comparación de aumento, con la incógnita en la diferencia	*María tiene 7 € y Juan tiene 5 €. ¿Cuántos euros tiene María más que Juan?*	3
Comparación de disminución, con la incógnita en la diferencia	*María tiene 7 € y Juan tiene 5 €. ¿Cuántos euros tiene Juan menos que María?*	3
Comparación de aumento, con la incógnita en el comparado	*María tiene 7 €. Juan tiene 3 € más que María. ¿Cuántos euros tiene Juan?*	3
Comparación de disminución, con la incógnita en el comparado	*Juan tiene 9 €. María tiene 3 € menos que Juan. ¿Cuántos euros tiene María?*	3
Comparación de aumento, con la incógnita en el referente	*María tiene 9 euros. María tiene 6 € más que Juan. ¿Cuántos euros tiene Juan?*	4
Comparación de disminución, con la incógnita en el referente	*María tiene 9 €. María tiene 6 € menos que Juan. ¿Cuántos euros tiene Juan?*	4

© Ediciones Pirámide

Los problemas de orden uno de la tabla son los primeros que deberían abordar los escolares. Corresponderían a una primera fase de desarrollo del aprendiz (recuento), en la que el escolar puede ordenar números $2 < 4 < 5$ y encontrar el cardinal de un conjunto mediante el conteo. En esta etapa se introducen los problemas aditivos con menor dificultad para los niños: combinación con la incógnita en el todo, cambio de aumento o disminución con la incógnita en la cantidad final, y se trabaja con conjuntos, añadiendo, quitando, juntando o separando elementos.

Los problemas situados en el segundo orden de dificultad son idóneos para alumnos que consideran que la suma y la resta son procedimientos distintos y no han descubierto aún que se trata de operaciones reversibles. Se trabajan los problemas de cambio con la incógnita en la transformación.

Los problemas de tercer orden son apropiados para escolares que comprenden la relación de inclusión, la relación entre tres números en una ecuación (=) y la conexión de reversibilidad entre la suma y resta: si $a + b = c$, entonces $c - b = a$ y $c - a = b$, se dispone de un esquema reversible que puede usarse para encontrar la parte desconocida en una secuencia de acontecimientos. En este nivel se trabajan los problemas de combinación con la incógnita en una parte, cambio de aumento o disminución con la incógnita en la cantidad inicial, comparación de aumento o disminución con la incógnita en la diferencia y comparación de aumento o disminución con la incógnita en el comparado.

Los problemas de cuarto orden, en los que están implícitas relaciones direccionales, requieren que el escolar sea capaz de manejar la desigualdad y su relación con la igualdad, estableciendo la igualación por adición o sustracción (si $a > b$, entonces $a - c = b$ y $b + c = a$). Se adquiere la habilidad para manejar términos direccionales (más que/menos que) y cuantificar una relación (comparación). Los problemas que corresponden a este nivel son los más complejos, y se refieren a la comparación de aumento o disminución con la incógnita en el referente.

Aunque existan niveles en la capacidad de resolución de problemas de estructura aditiva, no se puede determinar una edad fija en el paso de un nivel a otro. Esta capacidad es variable y no se produce a la misma edad en todos los niños.

La naturaleza de las cantidades que están implicadas también es fuente de dificultad. Es el caso de los problemas de combinación en los que se empleen cantidades heterogéneas. Por ejemplo: «3 manzanas se juntan con 4 fresas en un frutero. ¿Cuántas frutas hay en el frutero?». La comprensión de este problema requiere abstraer dos cantidades a una categoría más amplia, la de fruta, lo que aumenta la dificultad del problema.

Actividad 1: Localiza en libros de texto ejemplos de cada uno de los tipos de problemas aditivos. Identifica el nivel escolar en el que aparecen en cada caso.

2.2. Dificultades cognitivas o dificultades ligadas al alumno

Las demandas que conllevan las operaciones matemáticas, como su carácter fuertemente jerárquico, que hace depender lo desconocido de lo previamente conocido, su exigencia de una práctica continuada o la necesidad de cierta comprensión y memorización, provocan que surjan dificultades cognitivas.

Una dificultad cognitiva surge cuando el escolar se enfrenta a problemas de un orden superior a su fase de desarrollo cognitivo.

© Ediciones Pirámide

En las operaciones aditivas, la principal dificultad se basa en no identificar la operación que resuelve un problema. Así, por ejemplo, niños que hayan sido escolarizados más tarde de lo normal presentan unas carencias de carácter cognitivo, como puede ser la comprensión lectora o la capacidad de análisis y síntesis de los datos. Estas carencias les lleva a resolver problemas aditivos en su vida diaria, pero a no ser capaces de resolver los problemas planteados en los libros de texto.

ACTIVIDAD 2: Identificar enunciados de problemas aditivos que produzcan dificultades en los alumnos, por no identificar la operación correspondiente.

Por ejemplo: «María, con 5 años, tiene 3 años más que Juan; determinar la edad de Juan», lo resuelven realizando 5 + 3, ya que la palabra «más» la identifican con suma.

2.3. Dificultades ligadas con la enseñanza

Algunas dificultades que presentan los escolares pueden estar provocadas por el tipo de enseñanza que han recibido. Por ejemplo, cuando la enseñanza se centra en la ejercitación de algoritmos, sin relacionarlos con acciones y problemas contextualizados, el escolar presenta dificultades en la comprensión de problemas. Otro fallo común en la enseñanza es enfatizar una comprensión parcial del problema, al utilizar palabras clave en el enunciado para identificar la operación que lo resuelve (por ejemplo, siempre que aparezca la palabra «más» resolver con una suma), en lugar de motivar la comprensión global del problema para obtener la solución. Este fallo suele ir acompañado de la exigencia de asociar de forma inmediata el problema con la operación que lo resuelve, para pasar a la realización del algoritmo. Cuando un alumno pregunta: «¿Maestro, este problema es de sumar o de restar?», está poniendo de manifiesto una falta de comprensión del problema y un enfoque equivocado de la enseñanza.

Todas estas dificultades dan lugar a diversos tipos de manifestaciones erróneas. Agrupamos los errores más frecuentes en la resolución de problemas de estructura aditiva en dos grandes categorías: errores de comprensión-representación y errores de ejecución de algoritmos.

2.4. Errores de comprensión-representación

Este tipo de errores se debe a una comprensión inapropiada del problema. Entre ellos se encuentran:

a) Repetir una de las cantidades propuestas en el problema. Estos errores surgen al tomar como solución uno de los datos proporcionados en el enunciado del problema. Este tipo de error proviene de una dificultad cognitiva por falta de comprensión de la relación aditiva parte-todo y a la dificultad de representar adecuadamente las relaciones entre las cantidades del problema.

Un ejemplo de este error, ante el enunciado de comparación «Pedro tiene 7 lápices más que Javier», es concluir que Pedro tiene 7 lápices. Otro ejemplo de error para un problema de combinación, «Elena y Mar tienen 7 pintaúñas entre las dos. Si Elena tiene 4 pintaúñas, ¿cuántos pintaúñas tiene Mar?», sería dar como solución: Mar tiene 7 pintaúñas. El error se produce al interpre-

© Ediciones Pirámide

tar erróneamente que 7, el total, es la cantidad que tiene cada persona en la oración «Elena y Mar tienen 7 pintaúñas entre las dos».

b) Uso inadecuado de palabras clave. Cuando aparecen en el texto palabras como «más», «añadir» o «combinar», algunos estudiantes concluyen que es un problema «de suma», al igual que «quitar», «eliminar» o «disminuir» lo identifican con un problema «de resta». Este error está ligado a una comprensión parcial del problema posiblemente fomentado en la enseñanza.

Ante el enuniado «Quique tiene 5 lápices. Quique tiene 3 más que María. ¿Cuántos lápices tiene María?», el escolar al leer el término más se limita a sumar 5 + 3.

c) Operación opuesta. Este error consiste en utilizar la operación opuesta a la que es adecuada para resolver el problema. A diferencia del error que consiste en el uso inadecuado de palabras clave, el alumno no se fija en un término específico, sino en la relación global del problema, pero presenta limitaciones para comprender la relación opuesta a una dada. Así, ante problemas de cambio-aumento con la incógnita en la cantidad inicial, «he añadido 2 patatas a mi plato, ahora tengo 7, ¿cuántas tenía?», responde 2 + 7 = 9, en lugar de buscar el número que al sumarle 2 da 7.

Los errores anteriormente descritos suelen estar relacionados con dificultades cognitivas. Los errores de inventar respuestas y palabras clave suelen ser más frecuentes en el primer curso de Primaria, mientras que en segundo curso prevalecen los errores de operación opuesta.

2.5. Errores de ejecución del algoritmo

En ocasiones, en la resolución de un problema se elige la operación aritmética apropiada, pero el algoritmo se ejecuta de manera incorrecta. Estos errores suelen corresponderse a dificultades ligadas a los conceptos y procedimientos de las operaciones aditivas. Los errores más comunes son:

a) Valor de posición del número. Se colocan de forma incorrecta los números en las columnas, sumando o restando una cifra de diferentes órdenes. Estos errores muestran que los alumnos no comprenden bien el valor de la posición del número (figura 10.5).

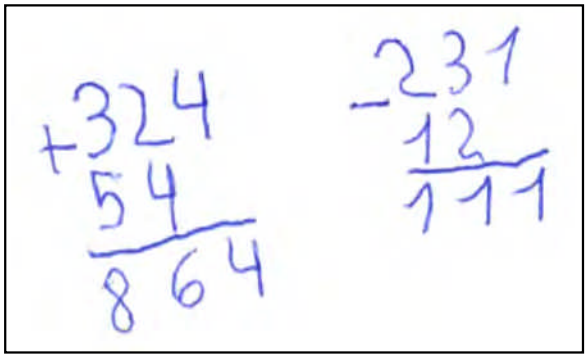


Figura 10.5.—Errores en el valor de posición.

b) Cambio u omisión en los pasos del algoritmo 300 – 15 = 25. Este error se presenta cuando el escolar olvida, o cambia por otro inventado, algún paso del algoritmo. Un ejemplo de este tipo de error por omisión sería no realizar llevadas (figura 10.6).

Un ejemplo de cambio en los pasos del algoritmo de la suma es operar con el cero, como si se estuviera multiplicando 0 + 5 = 0.

© Ediciones Pirámide

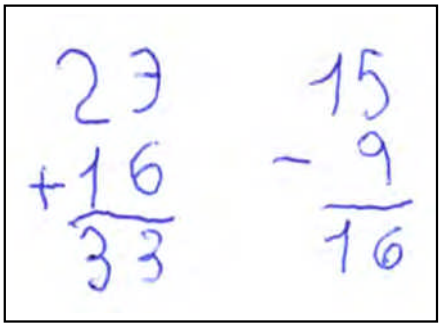


Figura 10.6.—Errores en llevadas.

c) Fallo de cálculo. Son aquellos errores relacionados con los hechos numéricos, ya sea debido a una confusión o desconocimiento.

d) De atención. En estos casos se resuelve bien la operación, pero al dar el resultado final no se identifica el resultado del problema con el de la operación.

3. MATERIALES PARA EL TRABAJO DE LA ESTRUCTURA ADITIVA

Existe una gran variedad de materiales con los que se puede trabajar las operaciones de adición y sustracción. Una forma de clasificarlas diferencia en materiales específicos para el trabajo con estas operaciones y materiales no específicos, que pueden ser usados para trabajar otros conceptos, como el de número. Otra posible categorización, dependiendo del tipo de magnitud, consiste en clasificarlos en lineales, como las regletas Cuisenaire, o discretos, como el ábaco.

En los capítulos 2 y 3 del libro *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* se describen y trabajan algunos materiales no específicos: ábaco, bloques multibase y regletas Cuisenaire. A continuación describimos algunos materiales para el trabajo de la estructura aditiva.

Tarjetas de Herbinière-Lebert

Es un material de tipo discreto, cuya característica principal es que los puntos que aparecen dibujados en las tarjetas aparecen agrupados de dos en dos, lo que permite reconocer inmediatamente los resultados de las operaciones de suma y resta, y distinguir los números pares de los impares.

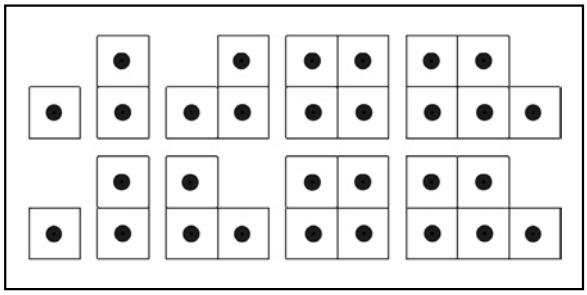


Figura 10.7.—Tarjetas de Herbinière-Lebert.

Para realizar una adición de dos números se pone una tarjeta a continuación de la otra; si se suma un numero par y uno impar, el impar irá abajo; si se suman dos números impares, se unen de forma que se emparejen los dos puntos sueltos. El resultado se ve directamente gracias a las configuraciones.

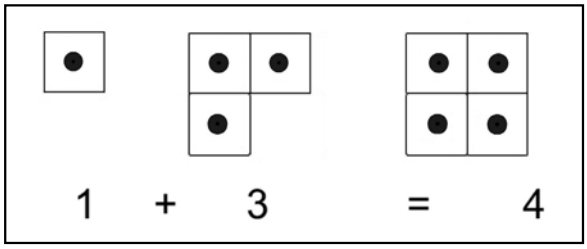


Figura 10.8.—Ejemplo de adición mediante las tarjetas de Herbinière-Lebert.

© Ediciones Pirámide

La sustracción se hace colocando una placa sobre la otra y, viendo el resultado, indicar qué parte queda por cubrir.

Las descomposiciones aditivas con este material son una actividad parecida a las regletas de Cuisenaire, con la excepción de que en este caso responden a un modelo discreto en lugar de un modelo de medida.

Pulicubos o cubos encajables

Este material está formado por cubos de colores, de 1 o 2 centímetros de lado, que se pueden encajar en sus 6 caras unos con otros, lo que los hace de tipo discreto (separados) o bien lineales (al encajarlos), por lo que se pueden realizar las mismas actividades que se realizan con materiales discretos y lineales. Además, este material es útil en otras áreas, como la iniciación al álgebra, la geometría o la medida.

Otros materiales de tipo específico son el dominó de sumas y restas o la rueda de sumas. Este tipo de dominó presenta las mismas reglas y meta que el clásico, pero con la peculiaridad de que cada parte de la ficha contiene una operación de adición o sustracción. La rueda de sumas está formada por una combinación de dos discos superpuestos, ambos divididos en sectores con números o representaciones puntuales. Las ruedas giran para realizar distintas adiciones o sustracciones.

ACTIVIDAD 1: Busca información sobre la rueda de sumas y enuncia posibles actividades que se pueden realizar con este material.

4. ENSEÑANZA DE LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

La estructura multiplicativa de los números naturales engloba todas las relaciones entre esos números y sus propiedades derivadas de las operaciones de multiplicación y división, teniendo en cuenta que la operación división, concebida como inversa de la multiplicación, no es cerrada en este conjunto.

4.1. Estructura multiplicativa

En términos generales, la estructura multiplicativa consta como contenido curricular de la Educación Primaria desde primer ciclo. En el primer ciclo, específicamente en segundo curso, se espera que los escolares interpreten situaciones de reiteración de un mismo número o una misma cantidad, lo cual se expresa indicando el «número de veces» que dicho número o cantidad se reitera; también se espera que realicen multiplicaciones sencillas mediante suma repetida o disposición en cuadrícula, acompañadas de estrategias de cálculo mental para calcular dobles y mitades. En el segundo ciclo, el escolar debiera conocer otras situaciones multiplicativas, como las combinatorias, las de reparto y agrupación, la factorización o descomposición multiplicativa de números sencillos, las tablas de multiplicar y los algoritmos de multiplicación y división por una cifra. En el tercer ciclo se introducen las relaciones de divisibilidad (múltiplo y divisor) y potenciación (cuadrados y cubos). En algunos documentos curriculares la multiplicación se enseña desde el tercer grado en adelante. Entre las expectativas de aprendizaje para la Educación Primaria encontramos las siguientes:

- Comprender las propiedades de la multiplicación de números naturales.
- Conocer y aplicar las relaciones entre la multiplicación y la división.
- Resolver problemas de estructura multiplicativa de una etapa.

© Ediciones Pirámide

- Enunciar problemas de estructura multiplicativa.
- Aplicar las operaciones producto y división a la resolución de problemas.
- Encontrar el máximo común divisor de dos números menores o iguales que 100.
- Calcular el mínimo común múltiplo de dos números menores o iguales que 12.
- Extraer factor común en expresiones aritméticas mediante la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y de la substracción.
- Factorizar números con divisores 2, 3 y 5.

4.2. Etapas para la enseñanza de la multiplicación y de la división

El aprendizaje de la multiplicación de números naturales requiere de un dominio de la estructura aditiva y de su comprensión. Por ello, se exige un dominio y un uso flexible de la adición, experto y suficiente, antes de introducir la multiplicación. Los niños desarrollan desde edades tempranas esquemas multiplicativos mediante la constitución de unidades compuestas y la acción de reiterar, que les lleva a contar progresivamente de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc., o regresivamente y a realizar repartos equitativos. Por tanto, los esquemas multiplicativos surgen de la modificación de los esquemas previos de contar y de la ampliación de las relaciones aditivas.

Para el caso de la división, aunque su enseñanza se introduzca en el segundo y en el tercer ciclo de Educación Primaria, los escolares pueden resolver con anterioridad sencillos problemas de división mediante una estrategia de sustracción repetida. La división (como inversa del producto) puede proceder de situaciones simétricas (combinación y productos de medidas) o de situaciones asimétricas (reparto, tasa y comparación).

Para establecer etapas en la enseñanza de las operaciones multiplicativas proponemos un esquema de su aprendizaje y enseñanza que se resume en la figura 10.1. Comenzamos por indicar cómo se favorecen las fases del aprendizaje de las operaciones y, posteriormente, reflexionamos sobre los problemas multiplicativos. No postulamos que haya que trabajar ambos aprendizajes por separado, sino que planteamos que cada proceso vaya acompañado de situaciones contextualizadas, en las que las operaciones respondan a acciones, tal como se aprecia en la descripción de cada fase. A continuación resumimos las etapas para las dos operaciones, aunque posteriormente trataremos aspectos específicos de la enseñanza de la división.

La fase conceptual de la enseñanza y aprendizaje de las operaciones multiplicativas tiene las siguientes etapas:

Etapa de acción. La ***multiplicación*** requiere un conteo más elaborado: el conteo de grupos regulares con más de una unidad (contar de dos en dos, de tres en tres, etc.). Para ello se separan los nombres de los números en grupos iguales mediante un esquema que registre el número de grupos que se repiten. Pueden utilizar los dedos para marcar los grupos contados. Requiere habilidad para pensar simultáneamente en dos tipos de unidades: *unidades simples* —objetos— y *unidades compuestas,* formadas por grupos de objetos. Ejemplos de acciones para multiplicar, aunque apoyadas sobre estrategias aditivas, son los siguientes:

- *Recuento:* 4 + 4 son 4, 5, 6, 7, 8, y 8 + 4 son 8, 9, 10, 11, 12 (Unitario), 4 × 3 son 4, 8, 12 (Rítmico).
- *Uso de hechos numéricos aditivos memorizados:* 4 + 4 son 8; 8 + 4 son 12.
- *Combinación de anteriores:* 4 (cálculo) 8, (conteo) 9, 10, 11, 12.

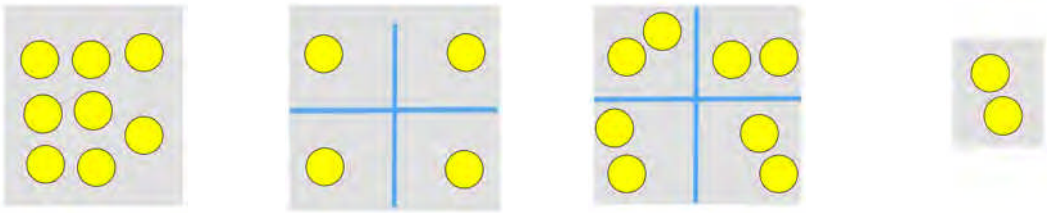
© Ediciones Pirámide

La ***división partitiva*** (calcular el tamaño de cada parte en que se reparte la cantidad inicial). Estrategias posibles son:

- *Reparto reiterado de unidades simples.* Formar grupos con los objetos considerados. Ejemplo: «Repartir 8 objetos entre 4 personas». 1) Colocar un objeto en cada uno de los cuatro montones, 2) repetir el paso anterior hasta repartir todos los objetos, y 3) contar el número de los objetos en uno de los montones.
- *Reparto reiterado de grupos de objetos.* Acortar el reparto asignando más de un objeto en cada reparto, haciendo ajustes sobre la marcha. Ejemplo: «Repartir 12 entre 3». Opciones: repartir 2 a cada uno, y si sobra repartir los que quedan; o bien repartir 5 a cada uno y, como faltan, repartir sólo 4 a cada uno.

Ejemplos de acciones se incluyen en las figuras 10.9 y 10.10.

Problema: «Repartir 8 objetos entre 4 personas»



1) Contar 8 objetos

2) Repartir un objeto en cada uno de los montones

3) Realizar el segundo paso hasta repartir el total de objetos

4) Contar los objetos de uno de los montones

Figura 10.9.—Acción de repartir uno en uno.

Problema: *«Repartir 12 objetos entre 3 personas»*

Repartir en grupos de *n* (en este caso 3). Si sobran, repartir hasta terminar

Repartir en grupos de *m* (en este caso 5). Si faltan, se reparten grupos de cantidad menor hasta ajustar el cociente exacto 4.

Figura 10.10.—Acción de repartir en grupos.

© Ediciones Pirámide

La ***división cuotitiva*** consiste en calcular el número de partes, conocidos el tamaño de la parte y la cantidad a repartir. Se puede resolver a través de dos acciones:

- *Medida,* formando grupos de tamaño específico. Ejemplo: agrupar 12 objetos en partes iguales de tamaño 3: *a*) formar un montón de 3, *b*) repetirlo hasta agotar todos los objetos, y *c*) contar el número de montones.
- *Substracción repetida.* Ir restando 3 al 12: $12 - 3 = 9$; $9 - 3 = 6$; $6 - 3 = 3$; $3 - 3 = 0$. Luego se cuenta cuántas veces se ha restado 3.

Etapa de uso de modelos. Las acciones se refuerzan mediante el uso de modelos, en los que se reproducen las acciones multiplicativas señaladas.

Etapa de simbolización. La simbolización es el siguiente nivel de abstracción. La notación $m \times n$ representa la acción realizada que involucre la multiplicación de m por n.

La fase procedimental de la enseñanza y aprendizaje de las operaciones multiplicativas tiene las siguientes etapas:

Etapa de uso de hechos numéricos y tablas. Los hechos numéricos son el conocimiento del resultado de una operación, sin necesidad de llevarla a cabo. Los hechos numéricos básicos son los productos entre los números del 1 al 9 que se recogen en las tablas. La tabla de multiplicar, a diferencia de la de sumar, incluye números más grandes, que requieren su memorización progresiva. El estudiante emplea hechos numéricos (aditivos) memorizados para deducir los multiplicativos (por ejemplo, 4×3 sería $4 + 4$ son 8; $8 + 4$ son 12). Sólo hay una tabla, la de la multiplicación, aunque los hechos numéricos pueden abarcar las dos operaciones (como $4 \times 3 = 12$, $12 \div 4 = 3$ y $12 \div 3 = 4$).

Etapa de uso del algoritmo. Una vez que el escolar alcanza un suficiente grado de dominio de los hechos numéricos básicos, procederá a la práctica de los algoritmos de la multiplicación y división, comenzando por procedimientos sistemáticos que comprenda y sin resumir operaciones que se realizan en dichos algoritmos (eliminar los ceros en los productos parciales desde las decenas en la multiplicación y las restas en la división).

Etapa de aplicación a la resolución de problemas. Si bien todas las etapas anteriores se desarrollan en un ambiente de resolución de problemas, en este momento los escolares tienen un dominio conceptual y algorítmico adecuado para abordar problemas de mayor dificultad.

La fase de acción requiere primero actividades manipulativas con material concreto; en un segundo nivel, actividades realizadas mediante representaciones figuradas en papel y la expresión verbal de dichas representaciones; en un tercer nivel se aborda la generalización de conceptos y propiedades de forma verbal, y en un cuarto nivel se expresarán simbólicamente las generalizaciones. Los números naturales a emplear en cada uno de estos niveles se introducirán en un orden creciente de magnitud, adaptado a la capacidad de los estudiantes. Este largo proceso de enseñanza abarca desde el último curso de Infantil hasta cuarto de Primaria.

4.3. Materiales y recursos

Los recursos y materiales didácticos para la fase de acción son los habituales en la enseñanza de la aritmética escolar, pudiendo tratarse de objetos separados, que permiten reunir un número determinado de colecciones de objetos en una sola colección, o realizar un reparto de objetos en partes iguales, es decir, hacer la operación ma-

© Ediciones Pirámide

nipulativamente. Las regletas de Cuisenaire constituyen un modelo de medida que permite trabajar el producto y la división de números pequeños. El ábaco permite realizar operaciones de multiplicar y dividir, descomponiendo los números en unidades de distinto orden, lo que ayuda a dar sentido a los números. También pueden emplearse juegos de mesa, cuyas reglas obliguen a realizar cálculos de multiplicación y división, ya sea con lápiz y papel, ya sea mentalmente o con calculadora, pudiendo emplearse para adquirir dominio en la realización de las operaciones. Emplear la calculadora, tanto para multiplicar dos números como para obtener series multiplicativas (por medio de repetición de un multiplicando), o de sumas y restas, prepara para hacer divisiones. Indagar sobre la división entera con la calculadora, estudiar restos, etc., va más allá de suplir el aprendizaje de otros procedimientos para realizar las operaciones.

5. APRENDIZAJE DE LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

En líneas generales, el proceso de aprendizaje de la estructura multiplicativa se inicia con situaciones concretas y fenómenos en los que están implicadas las relaciones de multiplicación y de división, hasta llegar a los conceptos abstractos. Es importante distinguir los conceptos de multiplicación y división de los algoritmos correspondientes. Conceptualmente, multiplicación y división forman parte de una misma estructura operatoria, al ser una inversa de la otra. Por tanto, para que el escolar perciba esta relación se debe hacer el estudio conjuntamente.

5.1. Hechos numéricos y tablas

El aprendizaje procedimental arranca con los hechos numéricos: términos y símbolos. Es muy conveniente que los alumnos distingan en un producto cuál es el multiplicando y cuál el multiplicador, y que sepan expresar qué papel desempeña cada uno de ellos en un producto concreto, para así representar un producto mediante sumas reiteradas. Una forma de favorecer el aprendizaje de los hechos numéricos multiplicativos es empleando estrategias para establecer dobles, triples, mitades y tercios. Ejemplos interesantes son: calcular el doble o triple de un número, o de una colección dada, reconocer de qué número o colección es doble o triple un número dado, representar y/o calcular el doble/triple de las canicas que un escolar tenga en una mano, reconocer entre varias la cantidad que es doble o triple de otra, o plantear problemas en los que aparezcan esas nociones.

Los hechos numéricos básicos de la multiplicación son los resultados de multiplicar dos números de una cifra. A diferencia de los hechos básicos de la suma (sumar dos números de una cifra da un resultado menor que 20, por lo que es sencilla su memorización en un corto período de tiempo), los resultados multiplicativos aumentan rápidamente, por lo que conviene tenerlos organizados en una tabla que sea fácilmente manejable. Las tablas de multiplicar no es necesario que se memoricen en un tiempo determinado, pues algunos resultados se pueden obtener mediante conteo o sumando; sin embargo, se aconseja una memorización progresiva, para proporcionar comodidad al hacer cálculo de lápiz y papel, o cálculo mental. La propiedad conmutativa es un apoyo importante para memorizar las tablas sin necesidad de construir los resultados como sumas reiteradas en todos los casos.

Más que memorizar las tablas de multiplicar, conviene trabajar técnicas para construirlas, tales como el trabajo con series ascendentes y descendentes de 2 en 2, de 3 en 3, etc., suman-

© Ediciones Pirámide

do o restando para llegar al siguiente número de la serie, representando dichas series en una recta numérica o en otro modelo (escribir), o bien haciéndolo mentalmente (recitar).

La realización de las tablas pitagóricas de multiplicar consiste en escribir sistemáticamente los hechos numéricos relativos a la multiplicación. En la figura 10.11 aparece la tabla de multiplicar, y algunos elementos de la posible tabla de división. En ella se pueden apreciar regularidades como las recogidas en la tabla 10.2.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

÷	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1								
2	2	1							
3	3		1						
4	4	2		1					
5	5				1				
6	6	3	2			1			
7	7						1		
8	8	4		2				1	
9	9		3						1

Figura 10.11.—Tablas pitagóricas de multiplicar y dividir.

TABLA 10.2

Apreciaciones en la tabla pitagórica de multiplicar

En cada fila o columna aparecen las tablas individuales de los números del 1 al 9, apreciándose su formación por suma repetida del número que encabeza la fila o columna. De ahí se obtienen relaciones tales como $7 \times 9 = 7 \times 8 + 7$.

En la tabla del 9, las parejas de números van aumentando en 1 las decenas y disminuyendo en 1 las unidades: 09, 18, 27, 36...

Los cuadrados perfectos están situados en la diagonal de la tabla y cumplen con la propiedad de que un número es cuadrado perfecto si y sólo si tiene un número impar de divisores.

La tabla es simétrica respecto de la diagonal, apreciándose la propiedad conmutativa.

Las filas o columnas encabezadas por números pares están formadas por números pares; en las encabezadas por números impares, se van alternando par e impar. Se aprecia, pues, la propiedad que indica que el producto de dos números solamente es impar cuando los dos factores sean impares.

5.2. Algoritmos

Los algoritmos de estas operaciones forman parte de las rutinas y procedimientos. Sin embargo, cada uno de ellos exige requisitos y habilidades diferentes, por lo que se aconseja que su mecanización se realice de forma independiente, centrando la atención en cada uno de los algoritmos para evitar posibles confusiones. Para introducir los conceptos conviene presentar situaciones intuitivas con números pequeños que involucren una multiplicación o una división y que puedan ser resueltas mediante sumas reiteradas o repartos equivalentes de forma manipulativa. Después se aumentarán progresivamente los números, para crear la necesidad del algoritmo, como alternativa eficaz a la complejidad creciente del procedimiento anterior.

© Ediciones Pirámide

Es imprescindible que en la enseñanza de la multiplicación y de la división se trabaje el cálculo mental para favorecer la agilidad mental en el cálculo y en situaciones cotidianas. El cálculo mental es diferente al cálculo escrito. Aunque el profesor puede enseñar técnicas o destrezas de cálculo mental, se aconseja que los propios estudiantes las encuentren mediante la práctica regular de las tareas.

Si no se introduce el cálculo mental previo al aprendizaje del algoritmo, los estudiantes tienden a realizar cálculo mental reproduciendo mentalmente el algoritmo correspondiente. Es, pues, recomendable trabajar el cálculo mental desde edades tempranas, introduciendo una amplia variedad de estrategias de cálculo y favoreciendo que los estudiantes diseñen, modifiquen o seleccionen aquéllas más adecuadas para enfrentar diversas situaciones de cálculo mental.

El cálculo escrito se tiene que realizar de manera progresiva, desde la expresión oral hasta la expresión simbólica, partiendo de las situaciones de sumas repetidas y representaciones manipulativas. Se sugiere pasar por etapas como describir la situación, primero de manera aditiva, para posteriormente emplear el término «veces», o simbolizar la expresión aditiva antes de introducir el símbolo de multiplicar, escribiendo igualdades de secuencias (aditivas y multiplicativas) antes de trabajar exclusivamente con la expresión multiplicativa simbólica.

Se debe tener precaución a la hora de introducir las multiplicaciones de un número de una cifra por otro de dos cifras. Para ello, se deben introducir previa descomposición del número de dos cifras en decenas y unidades y sumando los resultados. El algoritmo es totalmente «opaco» en su mecanización, que se aprende de memoria, sin establecer conexión con el concepto, salvo en su inicio.

La enseñanza de los algoritmos estándares de la multiplicación y la división con números de varias cifras se ha de realizar mediante la práctica de los pasos encadenados que el escolar ha de recorrer. Se ha constatado que es una buena estrategia de aprendizaje realizar el algoritmo de la división con restas explícitas. Además, es conveniente que los estudiantes realicen las operaciones con algoritmos no convencionales, para reforzar el sentido numérico. Calcular el dividendo de la división es conocido tradicionalmente como hacer la prueba de la división. Esta acción es importante para comprender la relación existente entre la multiplicación y la división.

5.3. Resolución de problemas

La última etapa de aprendizaje supone incidir en la aplicación de las operaciones multiplicación y división a la resolución de problemas. Debe entenderse que los problemas se trabajarán desde la etapa de acción.

En la enseñanza de los problemas de multiplicar y dividir distinguimos diversas fases. En la primera los niños aún no saben calcular, lo que obliga a resolver los problemas mediante agregación y separación de colecciones de objetos de igual número de elementos, empleando el conteo. Progresivamente se emplearán números mayores, en la medida en que los escolares puedan emplearlos significativamente. El paso del campo puramente numérico (conteo) al campo del cálculo (algoritmo y cálculo mental) se ha de realizar en el momento adecuado. No conviene, por tanto, que el alumno siga contando cuando tiene la posibilidad de calcular; en tal caso, tampoco es bueno que resuelvan un problema de multiplicar sumando.

Se debe favorecer que los alumnos enuncien preguntas e inventen problemas que se respondan y resuelvan con multiplicaciones y divisiones dadas. Esta actividad debe realizarse duran-

© Ediciones Pirámide

te el aprendizaje de los algoritmos y mantenerse a lo largo de todo el proceso de aprendizaje, para que los conceptos se consoliden y estas operaciones se asocien a la gran variedad de situaciones que modelizan.

Las etapas de aprendizaje en la resolución de problemas se pueden caracterizar en función de la dificultad relativa de los diferentes tipos de problemas multiplicativos. Si nos centramos en problemas de una sola etapa (en los que sólo es necesaria una multiplicación o división para resolverse), en la tabla 10.3 aparecen ordenados los distintos tipos de problemas por niveles.

TABLA 10.3

Dificultad y orden de enseñanza de problemas multiplicativos

Tipos de problemas multiplicativos	Subtipos (según ubicación de la incógnita)	Ejemplos	Orden
Isomorfismo de medidas (suma repetida)	Incógnita en medida de la segunda magnitud	Luisa tiene 5 cajas de naranjas, con 12 naranjas cada caja. ¿Cuántas naranjas tiene Luisa?	1
	Incógnita en medida de la primera magnitud	Luisa compró 60 naranjas y cada caja tiene 12 naranjas. ¿Cuántas cajas compró Luisa?	
	Incógnita en tasa	Luisa compró 60 naranjas y quiere repartirlas a partes iguales en 5 cajas, ¿Cuántas naranjas tendrá cada caja?	
Producto cartesiano	Incógnita en cardinal del producto cartesiano	¿De cuántas formas se combinan 3 camisetas con 5 pantalones?	2
	Incógnita en cardinal de alguno de los factores	Para vestirme de 15 maneras distintas tengo 5 pantalones. ¿Cuántas camisas necesito?	
Comparación	Aumento con comparado desconocido	Luisa tiene 8 euros. Felipe tiene 3 veces los euros de Luisa. ¿Cuántos euros tiene Felipe?	3
	Disminución con comparado desconocido	Daniel tiene 12 canicas. María tiene 6 veces menos canicas que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?	
Comparación	Aumento con referente desconocido	Andrés tiene el triple de bombones de los que tiene María. Si María tiene 3 bombones, ¿cuántos bombones tiene Andrés?	3

© Ediciones Pirámide

TABLA 10.3 *(continuación)*

Tipos de problemas multiplicativos	Subtipos (según ubicación de la incógnita)	Ejemplos	Orden
Comparación	Disminución con referente desconocido	Andrés tiene tres veces menos bombones de los que tiene María. Si María tiene 12 bombones, ¿cuántos bombones tiene Andrés?	3
	Aumento con escalar desconocido	Andrés tiene 12 bombones y María 24 bombones. ¿Cuántos veces tiene María más bombones que Andrés?	
	Disminución con escalar desconocido	María tiene 12 bombones. Si Andrés tiene 2 bombones, ¿cuántas veces tiene Andrés menos bombones que María?	

Los problemas de comparación y los problemas de producto cartesiano son más difíciles que los problemas de isomorfismos de medida. Dentro de los problemas de comparación hay diferentes niveles de dificultad. La comparación de disminución presenta más dificultad de comprensión que la comparación de aumento. Si bien una formulación lingüística de la comparación que sea familiar para el escolar favorece la comprensión de este tipo de problemas, los problemas de referente desconocido son más difíciles de comprender, junto con los problemas de comparación de disminución con el escalar desconocido.

Los problemas se pueden clasificar, además, en dos familias, según el papel que desempeñen los datos involucrados en la multiplicación:

- Problemas simétricos. Los datos involucrados en la multiplicación juegan el mismo papel (pueden ser tanto multiplicando como multiplicador), es decir, están expresados en las mismas unidades, aunque el resultado esté expresado en unidades diferentes. Por ejemplo, el área de un rectángulo de altura y base conocidas, el número de combinaciones de elementos de un conjunto (camisetas) con los de otro (pantalones), etc.
- Problemas asimétricos. Los datos juegan distinto papel (algunos sólo pueden ser multiplicando y otros multiplicador). Por ejemplo, en los problemas de grupos iguales, «número de grupos» juega el papel de multiplicador, y «cardinal de cada grupo» juega el papel de multiplicando. En los problemas de proporcionalidad se trabaja con dos conjuntos (uno relativo a la cantidad de unidades y el otro de la magnitud empleada), y hay que poner en relación algún elemento con un subconjunto del otro.

6. DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES MULTIPLICATIVAS

Al igual que hemos hecho con las dificultades principales en el aprendizaje de las operaciones aditivas, agrupamos las dificultades multiplicativas en las siguientes categorías:

© Ediciones Pirámide

a) dificultades ligadas a la complejidad matemática y procedimental de las operaciones multiplicativas; *b*) dificultades semánticas debidas a obstáculos por el lenguaje, en este caso la ruptura entre las expresiones simbólicas de las operaciones y las acciones que comportan, incluyendo en su interior las relacionadas con el lenguaje, y *c*) dificultades relacionadas con la enseñanza.

6.1. Dificultades relativas a la complejidad de las operaciones multiplicativas

La complejidad procedimental de las operaciones multiplicativas es mayor que la de las operaciones aditivas. Sobre la resolución de problemas vamos a atender exclusivamente a los problemas de una etapa, y no nos ocuparemos de otras variables ya enunciadas, como el tamaño y tipos de números de los datos y la complejidad léxica de los enunciados.

Las acciones relacionadas con la multiplicación añaden una complejidad especial a los problemas aritméticos. Mientras que añadir, quitar y repartir son acciones concretas y fáciles de realizar y de visualizar, no ocurre lo mismo con «tantas veces», «cada», etc., que no presentan referencia a una acción directa de manera tan clara. De hecho, la equivalencia de «doble» con «dos veces» y «triple» con «tres veces» puede producir errores si no se enseña. Esta dificultad lleva a que muchos alumnos se confundan y utilicen las operaciones aditivas, en lugar de las multiplicativas, para resolver algunos problemas multiplicativos.

Otras dificultades por complejidad se deben a la diversidad entre los tipos de problemas multiplicativos, ya que las diferencias entre las acciones de «sumar repetidamente» (proporcionalidad, isomorfismo de medidas) y «comparar» o «combinar» (producto cartesiano), son mayores que las que aparecen en los problemas aditivos.

La primera diferencia destacable aparece en el distinto papel que desempeñan los términos de las operaciones «multiplicando» y «multiplicador» y «dividendo» y «divisor», respectivamente, que se refleja en propia la naturaleza de los datos. Hay que distinguir entre problemas simétricos y asimétricos, aunque la operación tenga la propiedad conmutativa.

Si la multiplicación es descontextualizada o la situación es simétrica (los factores pueden desempeñar ambos papeles; por ejemplo, frente al problema «¿Cuántos elementos tiene una matriz de 2 filas y 3 columnas?», las operaciones $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$ contando por columnas y $3 \times 2 = 3 + 3$, contando por filas, tienen sentido dentro de ese mismo contexto), el orden de los factores es irrelevante por la propiedad conmutativa, pero el significado de la multiplicación cambia en situaciones asimétricas (los factores sólo desempeñan un único papel; por ejemplo, «¿Cuántos caramelos hay en 5 bolsas de 10 caramelos cada una?» tiene la misma solución que «¿Cuántos caramelos hay en 10 bolsas de 5 caramelos cada una?»), pero la situación «real» del primer problema sólo responde a una de esas situaciones, y ello es lo que puede provocar errores en los estudiantes. A diferencia de la estructura aditiva, el resultado de la multiplicación y el cociente de una división están expresados en unidades diferentes, por lo que los escolares pueden incurrir en los siguientes errores:

- No consideran las unidades al dar el resultado o lo expresan en las mismas unidades que los factores.
- Frente a una situación asimétrica $a \times b$, los estudiantes indican que $b \times a$ no tiene sentido o que no es conmutativa.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 1: Inventa un problema multiplicativo asimétrico. Explica detalladamente el papel de los factores en el problema. ¿Cómo ilustrarías la propiedad conmutativa de la multiplicación a los estudiantes?

6.2. Dificultades semánticas debidas a obstáculos por el lenguaje

Las principales dificultades semánticas proceden de que no siempre hay una correspondencia clara entre los verbos de acción y las operaciones multiplicativas. El verbo «repartir» se convierte en un referente de la división a la que no siempre corresponde. Igualmente, identificar las operaciones con acciones tipo lleva a no identificar fácilmente los problemas que no correspondan a esos tipos. Esto es lo que ocurre cuando se identifica la multiplicación con la «suma repetida», o la división con «reparto». Ante problemas de comparación y de producto cartesiano se aprecia la necesidad de plantear situaciones de varios pasos, sin hacer una identificación directa con la operación correspondiente.

Otras dificultades de este tipo son de naturaleza estructural, como las relacionadas con las propiedades de las operaciones. Hay cierta disposición a aplicar las propiedades a operaciones que no las verifican. A consecuencia de esta dificultad, los alumnos incurren frecuentemente en el error de atribuir propiedades de la multiplicación a la división, especialmente cuando se basan en algunos casos en que las correspondientes igualdades son ciertas (incluyendo elementos iguales o la unidad, como por ejemplo $[12 + 3] : 3 = 12 : 3 + 3 : 3$).

Otra dificultad significativa de la multiplicación se debe al comportamiento singular del 0 y del 1 en la multiplicación y la división, poseyendo propiedades singulares al operarse con los demás números. Que 0 por cualquier número sea 0 (papel cancelativo del 0) y que 1 por cualquier número sea el mismo número (elemento neutro del producto), desconcierta a los escolares porque el resto de los números no se comportan así. Para lograr que los escolares acepten tales singularidades se aconseja plantearles situaciones que proporcionen sentido a las expresiones «0 veces algo es 0», «1 vez algo es ese algo». Para los escolares es difícil comprender la singularidad del 0 de no poder ocupar el papel del divisor. El manejo del 0 como sinónimo de acción aditiva neutra (no cambia el otro sumando) les lleva a pensar que realiza el mismo papel en la división, por lo que repartir entre 0 es igual a dejar invariante el dividendo.

ACTIVIDAD 2: Plantea otras situaciones que muestren a los estudiantes la imposibilidad de dividir por 0 y el papel neutro del 1 en la multiplicación y división.

6.3. Dificultades relacionadas con la enseñanza

La enseñanza habitual enfatiza el cálculo simbólico, aportando poco apoyo en acciones y modelos que traduzcan a situaciones reales el enunciado. Esta enseñanza realza el procedimiento, dando lugar a que se separe el significado de la operación (las acciones que llevan implícitas) de la forma de obtener su resultado (el procedimiento, el algoritmo). En otras palabras, los estudiantes llegan a memorizar el procedimiento algorítmico de las operaciones, pero no siempre pueden identificar qué operación es la que corresponde, cuando resuelven o cuando inventan problemas multiplicativos.

Errores motivados por una enseñanza inadecuada pueden ser los siguientes:

© Ediciones Pirámide

- Confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos. Por ejemplo, aunque saben calcular 6×3, muchos alumnos tienen dificultades para elaborar el enunciado de un problema que se resuelva con esa multiplicación, dando enunciados como: «Hay 6 patos en el estanque y mientras comían vienen 3 más. ¿Cuántos hay ahora?».
- Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor. Por ejemplo, «Al repartir 72 caramelos entre 9 niños, ¿cuántos recibe cada uno?». El problema resuelto de la división $72 : 9 = 8$ se puede interpretar como que corresponden 8 caramelos a 9 niños y no 8 caramelos para cada niño.

ACTIVIDAD 3: Diseña o selecciona tareas que ayuden a los estudiantes a superar algunos de los errores anteriores.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de los números racionales y sus operaciones

11

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
ELENA CASTRO RODRÍGUEZ
JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ-PLAZA
PABLO FLORES MARTÍNEZ
MARTA MOLINA GONZÁLEZ

En este tema nos vamos a centrar en el aprendizaje y enseñanza de los números racionales. Así como los números naturales son parte importante de los contenidos matemáticos en Educación Primaria, otra porción importante del currículo de matemáticas de Primaria está formado por los números racionales, en los casos en que la medida no sea exacta, o bien como conceptos necesarios para introducir el pensamiento proporcional con magnitudes continuas. Conviene tener presente que el tratamiento de los racionales en Primaria es menos extenso y sistemático que el que se hace con los naturales. Se reduce a trabajar con situaciones similares a las utilizadas en la aritmética natural, pero con medidas expresadas con «números con coma», o bien en forma de fracciones sencillas. Igualmente, las operaciones con números racionales son una extensión de las operaciones con números naturales en situaciones como las ya descritas en el tema 10.

Este tema se compone de dos partes. En la primera estudiamos el aprendizaje y la enseñanza de los números racionales, centrándonos especialmente en las fracciones. El manejo de los números con

© Ediciones Pirámide

coma, que son precursores de los números racionales, debe favorecer la comprensión de los principios del sistema de numeración decimal.

La segunda parte se dedica al aprendizaje y enseñanza de las operaciones con números racionales, teniendo presente lo ya señalado: que su estudio es una iniciación, siempre relacionada con las operaciones con naturales, en situaciones concretas y buscando obtener resultados, más que para aprender procedimientos de cálculo.

En ambas partes describimos dificultades y errores, así como etapas de aprendizaje y de la enseñanza, y enumeramos los materiales y recursos precisos.

© Ediciones Pirámide

1. APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Tal como en otros temas sobre enseñanza y aprendizaje, comenzamos por describir los focos y objetivos de la enseñanza de los racionales, que completan los enunciados en el capítulo 9. Posteriormente introducimos las dificultades y los errores, las etapas para su aprendizaje y enseñanza, junto con algunos materiales y recursos usuales que inciden singularmente en la expresión de dichos números mediante fracciones. Hacemos esta reflexión para las fracciones y para los números decimales finitos o «números con coma».

Los focos prioritarios de contenido para este tema en el currículo de Educación Primaria son los significados, usos y representaciones de los números racionales (fracciones, decimales y porcentajes), la relación de orden de dichos números y la equivalencia de fracciones.

Todos los objetivos relativos al aprendizaje del número reflejados en el capítulo 9 afectan a los números racionales (usarlos, emplear vocabulario, conocer cuándo se usa, emplear representaciones, manejar el sistema de numeración decimal, captar su tamaño e identificar relaciones numéricas aditivas y multiplicativas). Es específico de los números racionales el conocimiento de las relaciones de orden y de densidad.

1.1. Dificultades con las fracciones

El medio social proporciona a los escolares un contacto temprano con expresiones que se refieren a fracciones, en la mayoría de los casos a través de objetos de tres dimensiones. Son usuales expresiones como «come la mitad del pastel» o «dame media pera», lo que no quiere decir que el pastel o la pera hayan de dividirse en dos partes exactamente iguales. Posteriormente, la enseñanza en la escuela procura que los estudiantes construyan el concepto de fracción y todos sus significados de forma correcta. Para ello hay que evitar el abuso en la utilización de los términos fraccionarios desligados de su significado. A modo de ejemplo, reproducimos una conversación de un grupo de estudiantes que están planeando una salida y no se ponen de acuerdo. Unos quieren ir al cine, otros a un museo y otros a pasear. Uno de ellos dice: «No tenemos que ir todos al mismo sitio. Una mitad puede ir al cine, otra mitad puede ir al museo y la otra mitad puede pasear». Por mitad parece referirse a cada una de las tres partes en que quedaría dividida la pandilla, partes que, en todo caso, estarían compuestas por diferente número de personas.

Cuando los estudiantes aprenden las fracciones utilizan sus conocimientos previos sobre

© Ediciones Pirámide

los números naturales, los cuales sustentan y a veces inhiben la comprensión de las fracciones. Una de estas dificultades usuales es la consideración del numerador y del denominador de una fracción como valores aislados, siendo difícil para los escolares concebir una fracción como un solo número.

Por lo que se refiere a los diferentes constructos del número racional, los resultados de las investigaciones sobre sus significados muestran que interpretar una fracción como una o varias partes de un mismo todo es el modo de uso que menos dificultades presenta a los estudiantes, y también el que provoca menos errores. Estos resultados pueden deberse a que la enseñanza de las fracciones está muy centrada en dicho significado. El tipo de modelo utilizado para la representación de este significado y la forma de hacer su representación también influyen en las respuestas que dan los escolares en las evaluaciones. Así, de las tres formas en que está representada la fracción 1/2 en la figura 11.1, los escolares reconocen con más facilidad la primera y con menos facilidad la tercera de las representaciones.

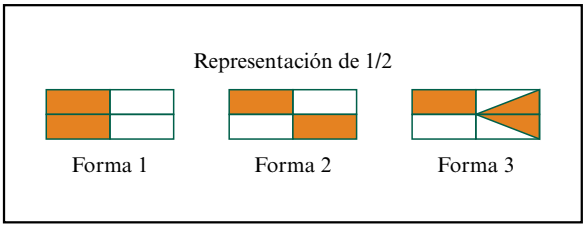


Figura 11.1.—Distintas representaciones de 1/2.

El significado de razón presenta mayor complejidad para los escolares y se desarrolla con posterioridad al significado parte-todo. Las dificultades que se presentan en este caso están basadas en la comparación multiplicativa presente en la razón, que entra en conflicto con el pensamiento aditivo, que está muy arraigado y puede ser un obstáculo para el desarrollo del pensamiento multiplicativo.

En la búsqueda de fracciones equivalentes, resulta más difícil para los escolares obtener fracciones equivalentes con términos (numerador y denominador) menores a los de una fracción dada, entre ellas la fracción irreducible, que obtener fracciones equivalentes con términos mayores, múltiplos de los iniciales.

En cuanto al orden de los racionales, los escolares no siempre perciben que las fracciones son números que llenan los huecos que dejan los enteros en la recta numérica. Por tanto, pueden no comprender que dos fracciones dadas son equivalentes y representan el mismo número, o que una de ellas representa un número mayor que el que representa la otra. La dificultad en la comparación de dos fracciones puede variar en gran medida dependiendo de su numerador y su denominador. También posee gran dificultad la tarea de encontrar una fracción que esté comprendida entre otras dos.

Dificultades en el uso de modelos para representar las fracciones

En lo que respecta al uso de modelos para la representación de fracciones, cabe mencionar algunas dificultades específicas que se presentan. Cuando se trabaja el significado de fracción como relación parte-todo, los escolares encuentran mayores dificultades para percibir el todo como unidad individual cuando se utiliza el modelo discreto (o de conjunto) que cuando se utiliza un modelo de área, aunque ambas representaciones sean similares, en tanto que si las sub-áreas se separan estas dos representaciones no son distinguibles, como se muestra en la figura 11.2.

© Ediciones Pirámide

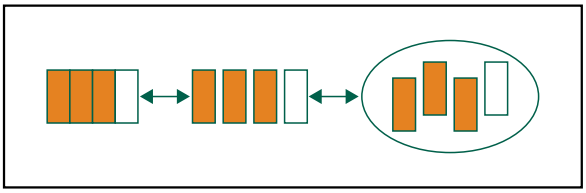


Figura 11.2.—Representaciones de 3/4.

También el modelo discreto ofrece similar dificultad al modelo de área cuando se trata de representar fracciones impropias (véase figura 11.3).

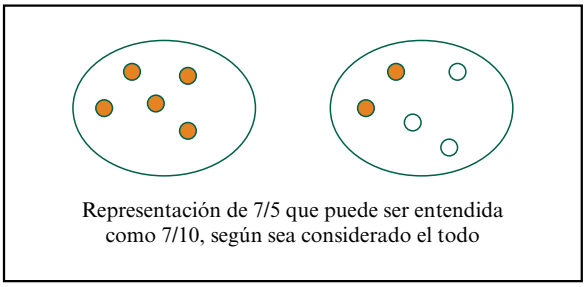


Figura 11.3.—Representación de 7/5 y 7/10.

Parecería que el modelo de la recta numérica está muy ligado al modelo de área, por la analogía existente entre ellos. No obstante, investigaciones realizadas sobre el aprendizaje con estos modelos informan que el modelo de recta numérica presenta mayor dificultad de aprendizaje para los estudiantes que el modelo de área, y también más dificultad que el modelo discreto. La explicación puede radicar en que la recta numérica representa la idea de fracción como si se tratara de un número similar a 0 o 1; no ofrece la idea de partes de un todo o parte de un conjunto de objetos, y reduce la fracción a un número abstracto. Mayor dificultad se encuentra cuando la recta donde se representa la fracción muestra varias divisiones, es decir, cuando la escala se extiende más allá del uno (como se muestra en la figura 11.4), produciendo errores en la elección de la unidad.

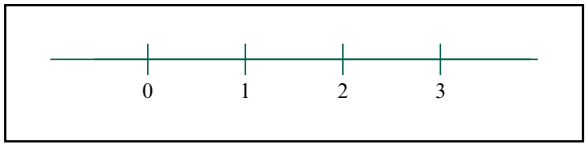


Figura 11.4.—Recta numérica.

La noción de fracciones equivalentes introducida a partir de un modelo de área ofrece menor dificultad que cuando se introduce con un modelo discreto. El modelo de área favorece la introducción de las operaciones suma y resta. Las cuestiones relacionadas con la razón son más sencillas de abordar desde el modelo discreto.

1.2. Dificultades con la notación decimal de los números racionales

Cuando se aborda la enseñanza de los números decimales, los escolares poseen un amplio conocimiento sobre números naturales. El aplicar este conocimiento a los números decimales provoca numerosas dificultades, debido a que algunos hechos, propiedades y relaciones que son ciertos para los números naturales no lo son para el caso de los números decimales. Las siguientes afirmaciones son ejemplos de propiedades que verifican los números naturales y no los decimales: *si un número tiene más cifras que otro, entonces es mayor; añadir un cero a la derecha de un número es equivalente a multiplicarlo por diez.* Ejemplo de la primera de las afirmaciones lo encontramos en aquellos escolares que pueden considerar que 0,07 es mayor que 0,4, ya que el primer número tiene más cifras que el segundo. La transformación de decimales a otros equivalentes

© Ediciones Pirámide

con igual número de cifras en su parte decimal ayuda a subsanar estos errores en la comparación de decimales. En este ejemplo se puede razonar que 0,4 son 4 décimas, que se puede convertir en 40 centésimas, número superior a 7 centésimas; por tanto, 0,40 es mayor que 0,07. Un razonamiento similar puede mostrar que 0,04 × 10 no tiene como resultado 0,040, sino 0,4.

Los decimales suelen estudiarse después de las fracciones. Por ello, el conocimiento que tienen los escolares sobre fracciones también puede ser un obstáculo en el aprendizaje de los decimales. En ocasiones, los escolares interpretan la parte entera como el numerador y la parte decimal como el denominador. Por ejemplo, al comparar dos decimales como 1,4 y 1,7 pueden considerar estos números como expresiones de 1/4 y 1/7, respectivamente. En esta interpretación de las notaciones decimales, afirmarán que 1,4 es mayor que 1,7 al relacionar el número antes de la coma con el numerador de una fracción y el número después de la coma con su denominador, debido a que en las fracciones con igual numerador es mayor aquella con menor denominador.

La experiencia de los escolares con los números decimales previa a su tratamiento en el aula está en su mayoría vinculada al uso del dinero. Este hecho puede provocar el error de asociar a céntimos todas las cantidades dispuestas a la derecha de la coma decimal, independientemente de que sean décimas, centésimas, milésimas, etc. Por ejemplo, 8,5 € equivale a 8 euros y 50 céntimos, diferente a 8,05 €, que son 8 euros y 5 céntimos.

Algunos escolares interpretan que los números que aparecen a la derecha de la coma en un decimal representan un número distinto al que precede a la coma. En estos casos no entienden los decimales como representación de parte de una cantidad, significado que es común al de las fracciones. Este error puede estar asociado a que en la escritura simbólica del número no se hacen explícitas las partes en las que se está dividiendo el todo, como ocurre en las fracciones. El uso de representaciones con el modelo de área, tales como las que se muestran en la figura 11.5, pueden ayudar a conectar números decimales y fracciones decimales equivalentes.

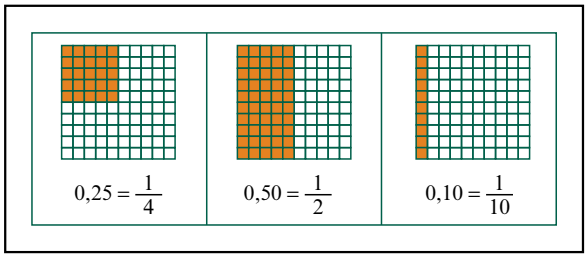


Figura 11.5.—Representación en cuadrícula 100.

Comparativamente, el aprendizaje de las fracciones es más fácil que el de los números decimales. Cuando se escribe 2/100 y se dice «dos centésimas», se ve que entre los dígitos de la fracción hay un 2 y un 100. Los decimales no tienen esta ayuda; cuando se dice «dos centésimas» no se ven fácilmente las cifras decimales de ese número. Análogamente, la notación .02 en una calculadora no ayuda automáticamente a leerla como dos centésimas. En el caso de los decimales, es la posición de la cifra respecto de la coma la que informa sobre su valor, como extensión de lo que ocurre en el caso de las cifras de los números naturales.

ACTIVIDAD 1: Busca tres situaciones conocidas por ti que se puedan expresar indistintamente usando una fracción y un número decimal.

1.3. Dificultades con la notación de porcentaje para racionales

Los porcentajes son un tercer modo de representación de los números racionales muy cercano a los números decimales, compuesto

© Ediciones Pirámide

por un numeral y el símbolo %. Su significado es el de razón o cociente entre dos cantidades. La comprensión de la naturaleza de los porcentajes presenta dificultades a los estudiantes, debido a que, independientemente de la cantidad que se esté considerando, ha de interpretarse como equivalente a una cantidad dividida en 100 partes. Así el 50% de una bolsa con 100 caramelos es 50, mientras que el 50% de una bolsa con 10 caramelos es 5. En casi todas las aplicaciones de porcentajes se encuentra implícita la idea de equivalencia.

Como razón, es decir, como cociente indicado entre dos cantidades de una misma magnitud, los porcentajes son utilizados en situaciones comparativas de muchos tipos. Por ejemplo, 6% puede representar 6 de 100 o 6 por cada 100 (relación parte-todo cuando se refiere a una misma colección). También el porcentaje se usa como constante de proporcionalidad; por ejemplo, 6 elementos de un tipo por cada 100 de otro tipo (cuando se refiere a dos colecciones diferentes). Un porcentaje puede expresar un operador que crea un nuevo número mediante el producto por 0,6 o por 6/100, una pendiente o la probabilidad de un suceso, entre otros. Esta variedad de modos de uso del porcentaje conlleva dificultades en su aprendizaje, la cuales se agravan cuando se trata de porcentajes mayores que 100.

Entre los errores que los escolares muestran en tareas de porcentajes cabe mencionar ignorar el signo %, y recuperarlo en la solución después de haber operado; considerar que 60 es el 50% de 30, cuando en realidad es al contrario (30 es el 50% de 60). Otro error usual consiste en aplicar una regla por la cual el signo % a la derecha de un número se reemplaza por un punto decimal a la izquierda de dicho número. Esta regla, que puede dar algún resultado correcto, como la conversión de 55% en 0,55, no funciona en todos los casos, como en la conversión de 110% en 0,110.

La mayor dificultad con el porcentaje parece ser promovida por la enseñanza. Se observa una disparidad entre la utilización de modelos para la enseñanza de las fracciones y de los decimales, tratando los porcentajes únicamente con símbolos.

1.4. Etapas en el aprendizaje de los números racionales

La fracción como parte de un todo es, entre los diferentes significados del número racional, el más intuitivo para los estudiantes. Este significado recibe más atención en la enseñanza, siendo el modelo de área el más utilizado para su representación. Posteriormente, basándose en este significado de fracción se desarrollan los significados de razón y de cociente.

La expresión mitad (como separación de un todo en dos partes iguales) es un vocablo de uso común, y su estudio se introduce tempranamente a los escolares. Más tarde se utilizará la representación simbólica (1/2) de la misma y su representación gráfica (como mitad de objetos planos). Las fracciones propias y de uso común, como 2/3, 3/4 o 2/5, son la continuación en este aprendizaje.

El aprendizaje de la fracción como parte de un todo o unidad exige que los escolares comprendan que:

- La región de partida es el todo, que ha de considerarse divisible en partes iguales.
- El todo puede ser dividido en un número indicado de partes iguales.
- Al unir la totalidad de las partes iguales se reconstruye el todo.
- El número de partes suele no coincidir con el número de cortes.
- Las partes se pueden considerar, a su vez, como todos si es necesario.

© Ediciones Pirámide

- El total se conserva a pesar de haberlo hecho partes.

Se aconseja que el proceso se inicie con la observación de objetos que pueden ser partidos o troceados, y con la distinción de cuándo una partición es un fraccionamiento (separación en partes «iguales») y cuándo no lo es (separación en partes diferentes). Por ejemplo, las imágenes *b*) y *d*) de la figura 11.16 corresponden a fraccionamientos, y las *a*) y *c*) corresponden a particiones no fraccionarias. Se dará nombre a las partes de dichos fraccionamientos en función del número de partes hechas (medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, onceavo, doceavo...). En la figura 11.6 cada parte fraccionaria de *b*) es un cuarto y cada parte en *d*) es un sexto.

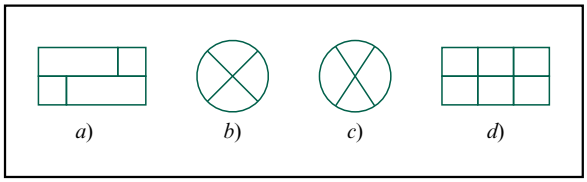


Figura 11.6.—Partición y fraccionamiento.

Una idea clave que los escolares necesitan comprender es que una fracción no informa sobre el tamaño del todo ni de las partes, y que para dar sentido a la misma se necesita conocer la unidad de referencia. Los escolares tienden a pensar más en la cantidad de partes que en su tamaño.

La representación simbólica de cada unidad fraccionaria (un medio = 1/2, un tercio = = 1/3, un cuarto = 1/4, un quinto = 1/5 y un décimo = 1/10) es el siguiente paso en la adquisición del conocimiento de las fracciones. Hay que conseguir que los escolares distingan el papel que juega cada número del par que integra una fracción, así como la denominación de su numerador y denominador. La utilización de una representación para el trabajo con fracciones entraña hacer una transición desde el diagrama (o representación pictórica) a la expresión verbal y a la representación simbólica (figura 11.7).

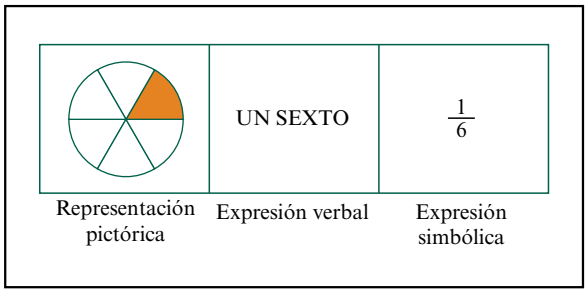


Figura 11.7.—Representaciones de una fracción.

Las fracciones equivalentes se interpretan como aquellas que *hacen referencia a la misma parte de un todo*. Este conocimiento es el siguiente a adquirir, tomando en principio fracciones unitarias y ampliando a otras con numerador y denominador mayores, múltiplos de los de la fracción de partida. Posteriormente se han de considerar fracciones de partida cuyo numerador y denominador sean divisibles por un mismo número. A partir del dominio y comprensión de la equivalencia se inician las operaciones de suma y resta de fracciones.

Las fracciones impropias (aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador) pueden tratarse como expresiones compuestas de un natural y una fracción, es decir, como un número mixto. En relación con este tipo de fracciones es necesario que los estudiantes adquieran las siguientes capacidades:

- Comprender e interpretar fracciones mayores que la unidad.

© Ediciones Pirámide

- Representar fracciones mayores que la unidad.
- Identificar la unidad en una representación en la que aparezca más de una unidad.

Los números racionales pueden expresarse, además de como fracciones, como decimales y como porcentajes, siendo necesario que los escolares conozcan en qué situaciones es más apropiado utilizar cada una de estas expresiones, además de adquirir habilidades para expresar un mismo número según distintas formas de expresión y flexibilidad, para utilizar la más conveniente en cada caso.

2. ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

La enseñanza de los números racionales en Primaria parte de situaciones familiares para responder a las exigencias del currículo. En este apartado comenzamos por revisar algunos materiales y recursos para la enseñanza de las fracciones, y posteriormente haremos apreciaciones sobre la enseñanza de las fracciones, de las equivalencias y de los decimales y porcentajes.

2.1. Materiales y recursos para la enseñanza de los racionales

Existe una amplia variedad de materiales manipulativos que permiten trabajar la representación fraccionaria de los números racionales, utilizando el significado parte-todo. Entre ellos destacamos el muro de fracciones (también denominado diagrama de Freudenthal), el puzle de fracciones, las tiras (o tablas) de fracciones, el libro de fracciones y el círculo de fracciones (véase algunos de ellos en la figura 11.8). Los cuatro primeros materiales mencionados muestran las fracciones como porciones de rectángulos de igual longitud y anchura, siendo el puzle el único en que las porciones son separables. El círculo de fracciones consta de dos piezas circulares, en una de las cuales hay marcados sectores circulares para representar fracciones inferiores a la unidad. Algunas de las marcas van acompañadas de la escritura simbólica de la fracción del círculo que corresponde a dicho sector.

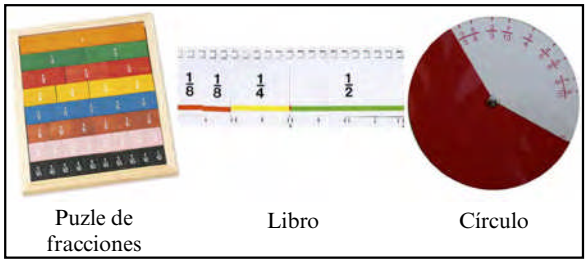


Figura 11.8.—Materiales para trabajar con fracciones.

El libro y el muro de fracciones facilitan una representación en la recta numérica de las fracciones incluidas. Esto permite trabajar de forma combinada ambas representaciones, lo cual sirve de apoyo visual para la comparación de fracciones e identificación de equivalencias.

Estos materiales, si bien están comercializados por diferentes empresas, se pueden fabricar de forma artesanal. Su utilidad radica en que permiten identificar, representar y comparar fracciones a partir de la superficie de las secciones o la longitud de las porciones, obtener fracciones equivalentes, así como descomponer y operar con números racionales en representación fraccionaria. Las actividades a realizar vienen condicionadas por las fracciones que aparecen en el material, las cuales son usualmente fracciones unitarias; si se combinan varios ejemplares del mismo material, se pueden representar fracciones mayores a la unidad.

© Ediciones Pirámide

Las regletas Cuisenaire también permiten trabajar fracciones cuando se toma como unidad una regleta más larga. El doblado de papel, el dibujo en papel cuadriculado o isométrico y el geoplano permiten representar y comparar fracciones. También existen materiales como sectores circulares, regiones rectangulares o bloques de patrones, que son versiones diferentes de modelos de área y se pueden utilizar con los mismos objetivos.

Otro tipo de material manipulativo a destacar son las barajas y dominós (véase figura 11.9), que incluyen diversidad de representaciones, tanto gráficas como simbólicas y verbales, de números racionales. Estos materiales son fácilmente construibles artesanalmente, pudiendo ser diseñados según la finalidad específica para la que se vayan a usar. Permiten identificar representaciones diferentes de un mismo número racional, ordenar números racionales y operar con fracciones. Los juegos planteados con ellos pueden seguir las mismas normas que existen en los juegos tradicionales de cartas y dominó, y favorecen ejercitar las destrezas aprendidas mediante los materiales anteriores.

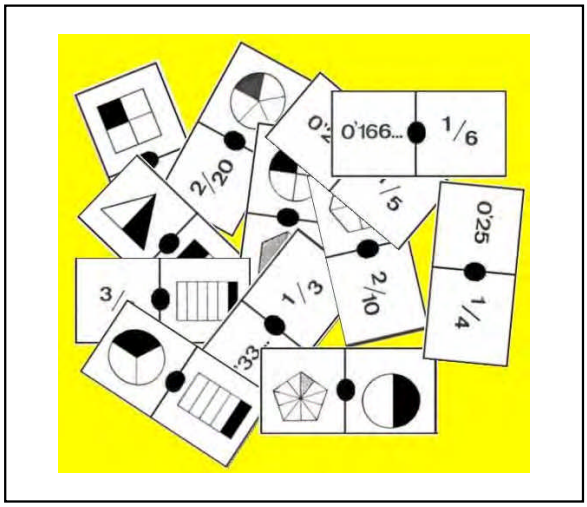


Figura 11.9.—Dominó de números racionales.

Se encuentran en la red diversidad de applets que permiten trabajar de forma virtual la identificación de números racionales a partir de alguna de sus representaciones, la equivalencia de representaciones de un mismo número racional así como sus relaciones. La figura 11.10 muestra un ejemplo de ellos de la web Illuminations del NETM[1].

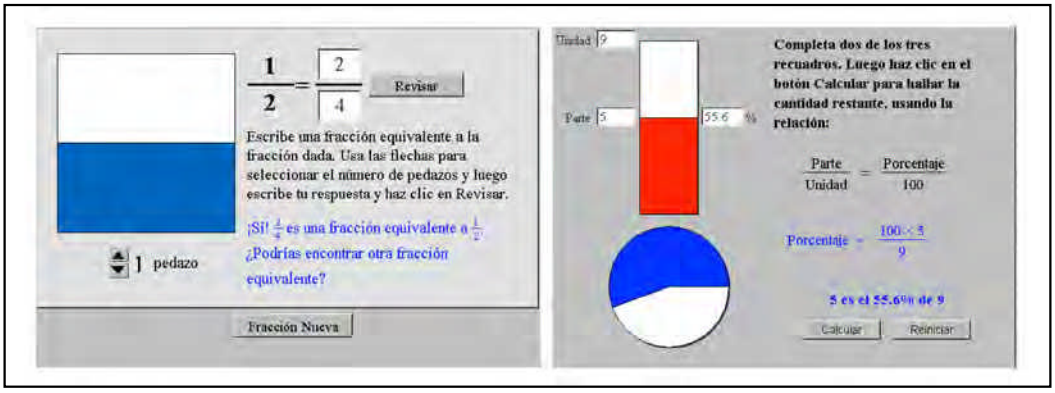


Figura 11.10.—Applets para el trabajo con números racionales.

[1] http://illuminations.netm.org.

© Ediciones Pirámide

2.2. Estrategias de enseñanza y tareas para las fracciones

Dado el alto grado de abstracción que requiere la comprensión de los números racionales, en su enseñanza se recomienda el trabajo sistemático y con sentido en contextos reales, antes de tratarlos de manera abstracta. Se comienza con el estudio de las fracciones, partiendo para ello de la división de objetos (todo) en partes iguales (unidad fraccionaria). Deben considerarse unidades o «todos» tanto continuos como discretos.

Algunas tareas para su enseñanza pueden ser del tipo:

- Dividir una tira de papel o folio en dos, tres o cinco partes iguales, e indicar cómo se llama cada parte. Indicar cuántos tercios hay en total en la tira o cuántos quintos. Estas mismas actividades se realizarán con materiales manipulativos y de forma gráfica con un segmento dado y figuras planas como rectángulos o cuadrados.
- Reconocer unidades fraccionarias en colecciones de objetos discretos (figura 11.11).

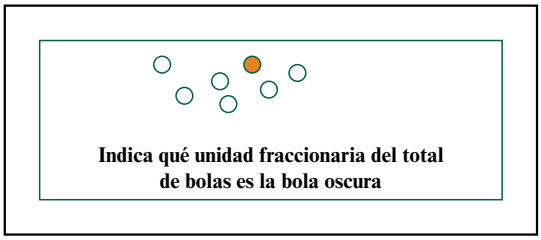


Figura 11.11.—Representación discreta.

- Trabajar el proceso contrario; es decir, conocida una parte, reconstruir el todo (figura 11.12).

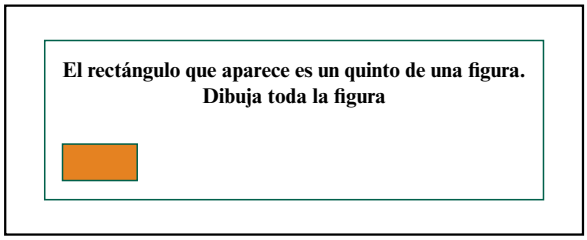


Figura 11.12.—Representación continua.

Conviene continuar con la división en n partes iguales de un objeto, de las cuales se toman k partes, representando simbólicamente esta acción por k/n, mediante modelos continuos o discretos. En una primera aproximación k será menor que n, aparecerán casos donde k sea igual a n, y se llegará a situaciones en las que k sea mayor que n.

Al trabajar con una partición equitativa, en una situación discontinua, por ejemplo repartir caramelos entre personas, la dificultad de la tarea depende de la relación entre el número de caramelos a repartir y el número de personas entre las que se reparte. Dado que las estrategias iniciales de los niños para repartir se basan en partir por la mitad, es recomendable comenzar con repartos entre 2, 4 u 8. Cuando los números son tales que sólo permiten que parte de la cantidad se reparta de forma entera (p. ej., repartir 10 entre 4), algunos escolares repartirán primero las unidades completas y después partirán las unidades restantes. La dificultad aumenta cuando la cantidad a repartir es inferior en número a la cantidad de grupos, pues la situación requiere una partición desde el comienzo del proceso de resolución. Una puesta en común de la resolución de este tipo de tareas hace necesario discutir la equivalencia de representaciones diferentes obtenidas a partir de distintas estrategias. En esta fase, una fracción se trabajará como fracción de un objeto, pasando progresivamente a la noción abstracta de fracción.

© Ediciones Pirámide

Representación de fracciones

El uso de modelos en la enseñanza de las fracciones y números racionales en general promueve el desarrollo de sus diferentes significados. Por lo general se introducen antes las fracciones que los decimales, mediante el significado parte/todo, utilizando situaciones concretas y modelos de área (figura 11.13).

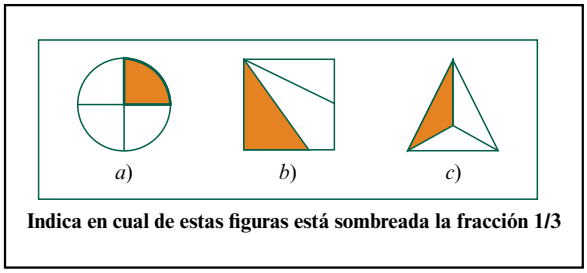


Figura 11.13.—Sombreado de partes.

El modelo de área conduce más directamente a la idea de fracción como parte de una unidad utilizada en la medida. El modelo discreto, o de conjunto, lleva de forma natural a la idea de razón y de porcentaje en situaciones numéricas más abstractas (1/3 de 30, 25% de 80). Esta aplicación supone considerar la fracción como un operador que actúa sobre otro número, en lugar de como entidad autónoma. El modelo recta numérica presenta algunas ventajas: las fracciones impropias se presentan de forma natural, ya que tanto la parte entera del número como la fraccionaria aparecen en la misma recta, proporcionando la idea de que las fracciones son una extensión de los números naturales y que rellenan huecos que éstos dejan en la recta (densidad de los números racionales).

Con el fin de establecer los fundamentos de la medición, del significado de operador y de los números mixtos, se considera necesario proporcionar a los escolares abundantes experiencias concretas tanto de la representación con modelos continuos, como el de área o recta numérica a través de conjuntos.

ACTIVIDAD 1: Enuncia una tarea escolar que haga referencia a una situación real, y mediante el desarrollo de la cual los escolares realicen la representación de la fracción 3/4 en un modelo continuo.

Equivalencia de fracciones, número racional

La comprensión de la equivalencia de fracciones conduce a concebir los números racionales como números susceptibles de ser ordenados y con posibilidad de operar con ellos. Son muchas las aplicaciones que exigen conocer que cada número racional puede ser representado por uno cualquiera de los miembros de una familia de fracciones equivalentes. Por ejemplo, conocer entre dos fracciones cuál es mayor, sumar y restar fracciones, en el uso de razones, etc.

La noción de equivalencia suele introducirse mediante la representación de área y de conjuntos. La investigación ha puesto de manifiesto que al trabajar la equivalencia de fracciones mediante el modelo de área, por doblado de papel y multiplicando por uno (1 = a/a, procedimiento que se conoce como «amplificar fracciones), el doblado de papel resulta ser el método más efectivo, y el de multiplicación por uno el menos efectivo.

ACTIVIDAD 2: Comprueba doblando un folio que las fracciones 1/4 y 2/8 son equivalentes. Diseña una tarea en la que tengan que doblar un folio para hacer la comprobación de la equivalencia de las fracciones 1/4 y 2/8.

© Ediciones Pirámide

2.3. Estrategias de enseñanza y tareas para los decimales y porcentajes

Con posterioridad a la enseñanza de las fracciones se introducen los números decimales, como representación equivalente obtenida a partir de fracciones cuyo denominador es una potencia de diez. Los decimales proporcionan una notación alternativa para los números racionales que ofrece algunas ventajas frente a la fraccionaria. Por ejemplo, la ordenación de números racionales o los cálculos complejos se pueden favorecer usando la notación decimal. Por otra parte, el uso de las calculadoras ha potenciado la expresión decimal de los números racionales, en detrimento de las fracciones, por lo que cada vez más se impone la enseñanza de los decimales a la de las fracciones.

Se sugiere introducir los diferentes significados de las fracciones en cualquier programa de enseñanza de los decimales. Así, se trabajará con:

- Decimales en tanto subárea de una región unidad (figura 11.14).

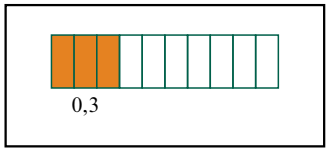


Figura 11.14.—División en diez partes.

- Decimales en tanto puntos de la recta real (figura 11.15).

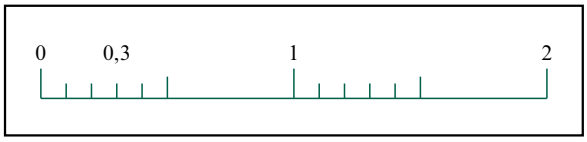


Figura 11.15.—Representación en recta real.

La comprensión de los números decimales exige entender que resultan de una división. Para tener una décima, una unidad se ha dividido en diez partes iguales; de forma similar ocurre para una centésima, y así sucesivamente. Influyen en esta comprensión una idea adecuada del valor posicional del sistema de numeración decimal y poseer un desarrollo adecuado del pensamiento multiplicativo, el cual es más complejo que el pensamiento aditivo. Los decimales que presentan un solo decimal (décimas) ofrecen menos dificultad que los que presentan varias cifras decimales.

Pueden utilizarse modelos de áreas para trabajar los porcentajes, como por ejemplo una cuadrícula 10×10 (figura 11.16).

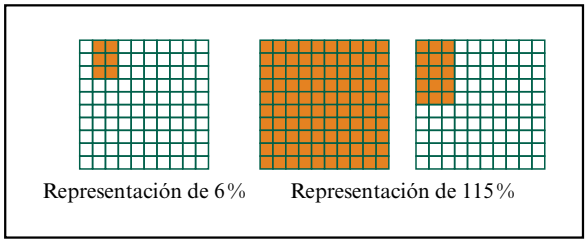


Figura 11.16.—Porcentaje en cuadrícula 100.

Por lo general, en los problemas basados en situaciones donde aparecen porcentajes se presentan tres cantidades: un valor inicial, un porcentaje, y un valor final obtenido al aplicar el porcentaje al valor inicial. Los problemas directos de cálculo del valor final, conocido el inicial y el porcentaje, ofrecen menos dificultad que en los que se desconoce alguno de los otros dos valores. Por este motivo se aconseja trabajar con situaciones en las que sea necesario buscar el porcentaje aplicado cuando se conocen los valores inicial y final (p. ej., un traje que costaba 345 € se ha rebajado a 320 €. ¿Qué porcentaje se ha rebajado?), y situaciones en las que

© Ediciones Pirámide

es necesario buscar el valor inicial cuando se conocen el porcentaje y el valor final (p. ej., he gastado 30 páginas de una libreta, y eso corresponde al 50% de las páginas. ¿Cuántas páginas tiene la libreta?).

La comparación de porcentajes es útil en muchas situaciones de la vida real que pueden ser engañosas. Por ejemplo, una rebaja de 10 € en un producto cuyo precio es 45 € no es equivalente a una rebaja de 10 € en otro producto de precio 98 €. Comparando los porcentajes rebajados se aprecia este hecho.

ACTIVIDAD 3:

a) Compara los porcentajes rebajados en los dos casos indicados en el párrafo anterior y decide en qué caso la proporción de la rebaja es mayor.
b) Propón una tarea en la que se realice una comparación de porcentajes basada en un hecho real.

Una forma de ver la utilidad de los decimales y los porcentajes y, por tanto, potenciar su comprensión por los escolares, es ayudarse de ejemplos concretos y no limitarse al aspecto abstracto de los mismos.

ACTIVIDAD 4: Indica tres situaciones de la vida real en cuya expresión se utilicen decimales, y otras tres en las que se utilicen porcentajes.

3. OPERACIONES CON FRACCIONES Y DECIMALES

Las operaciones con racionales deben presentarse como acciones con elementos concretos antes que como aplicación de reglas con expresiones simbólicas. En este apartado comenzamos por analizar los aspectos operatorios con números racionales que se tratan en Primaria, para, posteriormente, examinar las dificultades y errores más frecuentes y, finalmente, hacer algunas consideraciones sobre su enseñanza.

3.1. Operaciones con racionales en el currículo de Primaria

En general, en el currículo de Primaria se alude a las operaciones con racionales. En los estándares del NCTM se separan explícitamente la aparición de fracciones y números decimales como resultado de operaciones con naturales (divisiones menores que la unidad, por ejemplo), de las operaciones con fracciones. Igualmente, se señala que las operaciones deben trabajarse en el ámbito de problemas de fraccionamiento, sin pretender generalizaciones que den énfasis a los procedimientos operatorios con racionales.

Hay coincidencia entre distintos currículos sobre la necesidad de centrarse en fracciones sencillas, de las que aparecen en la vida cotidiana, por lo que interpretamos que las operaciones de sumar y restar también deben hacerse con fracciones. A tal fin es importante el manejo de fracciones equivalentes: un medio como dos cuartos, como tres sextos, como cinco décimos, principalmente; un tercio como dos sextos e incluso como tres novenos (en situaciones en que sea necesario calcular novenos).

Se percibe que los documentos curriculares proponen que en este período de enseñanza las operaciones con racionales no se constituyan en objeto sistemático y formal de enseñanza. Esto no debe impedir realizar operaciones sencillas. A continuación diferenciamos cuatro tipos de situaciones en las que pueden realizarse operaciones con racionales en Primaria, sin que ello requiera definir especialmente estas ope-

© Ediciones Pirámide

raciones ni sistematizar procedimientos operatorios.

a) *Generalización de las operaciones con naturales,* comenzando por realizar operaciones de naturales con racionales. Se puede calcular el precio de una compra de dos productos que cuestan *1,20 € y 2 €*, sumando por una parte las cantidades enteras y por otra las decimales, sin que ello suponga establecer una forma específica de operar con números decimales. También se puede determinar la duración de una sesión de teatro, si la primera parte dura 1 hora, el descanso media hora y la segunda parte hora y media.

Operaciones multiplicativas de suma reiterada, o de reparto de una cantidad racional, como determinar el tiempo que tarda una sesión de entrenamiento, si tengo que hacer 5 series de minuto y medio cada una, es un ejemplo de multiplicación. Obtener cuánto nos corresponde a cada hermano, si nos han dado 5 euros para repartir entre los dos, es un ejemplo de división con la expresión decimal.

ACTIVIDAD 1: Busca situaciones cotidianas que utilizan los alumnos de Primaria en las que tengan que sumar y restar números racionales extendiendo operaciones con naturales.

b) Operaciones con racionales convertidas en operaciones con cantidades naturales de las porciones unitarias. Considerando que $\frac{3}{4}$ de kilo son 3 veces $\frac{1}{4}$ de kilo, se puede calcular el peso de la bolsa de la charcutería, si he comprado $\frac{3}{4}$ de kilo de salchichón y $\frac{1}{4}$ de kilo de jamón, por medio de operaciones con naturales, obteniendo la cantidad de cuartos de kilo que he comprado.

ACTIVIDAD 2: Resuelve el siguiente problema mediante este procedimiento. Busca otros problemas que puedes resolver interpretando la fracción como cantidad de fracciones unitarias.

¿Qué porción de hora he estado fuera de casa para hacer un recado, si he tardado un cuarto de hora en ir, un cuarto de hora en hacerlo y un cuarto de hora en volver?

c) Operaciones que se pueden resolver mediante *fraccionamiento.* Por ejemplo, para determinar la porción de alumnos de la clase que juegan a algún deporte, si $\frac{1}{2}$ de los 24 alumnos de la clase juegan al fútbol y $\frac{1}{3}$ juegan al baloncesto, se comienza por obtener los 12 alumnos que practican el fútbol, los 8 que practican baloncesto, se suman para reunirlos en un problema aditivo de combinación, y se obtiene la fracción de la clase que representan, $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ de la clase.

En estos problemas se tiene clara la unidad a la que se refieren.

ACTIVIDAD 3: Resuelve aplicando fraccionamientos, determinando las porciones de la unidad en los problemas siguientes:

1. Porción de una botella de un litro que he rellenado de refresco, si he echado $\frac{1}{4}$ de litro de agua y $\frac{1}{2}$ litro de jarabe.
2. Porción del camino que me queda por recorrer, si antes de comer he recorrido los $\frac{2}{3}$ del camino y $\frac{1}{4}$ después de comer.
3. Porción de alumnos de la clase que han llegado puntuales, si sólo han venido la mitad de una clase de 30 alumnos, y un tercio de los que han venido ha llegado tarde.

d) Situaciones de simbolización que expresen relaciones fraccionarias y racionales

© Ediciones Pirámide

sencillas, utilizando los símbolos de las operaciones. Para ello se pueden identificar relaciones a través de materiales y recursos. Comparando las fichas de un puzle de fracciones se puede apreciar que «$\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$», y expresarlo en diversas formas simbólicas, recordando las correspondencias empleadas con los números naturales $\left(2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2, \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right)$.

ACTIVIDAD 4: Busca enunciados de problemas de operaciones con fracciones en libros de texto de Primaria y resuélvelos empleando alguno de los métodos propuestos.

3.2. Enseñanza de las operaciones aditivas con racionales en Primaria

Tal como hemos indicado, es muy importante comenzar a trabajar ampliamente con decimales y fracciones que correspondan a situaciones del entorno, promoviendo la comprensión de su significado y la forma en que se representa (en forma simbólica y con modelos como el de área). En estas situaciones es posible afrontar operaciones elementales de suma y resta, que tengan significados concretos:

«Si pasa un cuarto de hora y luego otro cuarto de hora, ha pasado media hora».

«Si he comprado un cuarto de kilo de almejas y otro cuarto de kilo de gambas, la bolsa de la pescadería pesa medio kilo».

El paso de estas situaciones cotidianas a operaciones simbólicas tiene que atravesar diversas etapas. Vamos a diferenciar el caso de las operaciones aditivas del de las operaciones multiplicativas.

En el capítulo 10 hemos establecido un orden para la realización de las operaciones, con naturales que mantenemos para los racionales: *a*) acción, *b*) representación-modelización, *c*) simbolización. En este caso, la primera fase incorpora acciones reales con las representaciones de las cantidades, que se corresponden con las enunciadas en situaciones concretas de enunciado. En estas acciones percibimos que hay una diferencia sustancial entre las acciones aditivas y las multiplicativas, en los racionales. Mientras que las acciones aditivas con racionales corresponden con acciones similares con naturales, no ocurre igual con las multiplicativas, que añaden significados diferentes. Esto hace que se puedan llegar a entender en Primaria las sumas y restas simbólicas y sea difícil entender la simbolización de las operaciones multiplicativas.

Para las operaciones aditivas, en **primer** lugar es conveniente que los alumnos *identifiquen situaciones* que involucren cantidades no enteras en las que interese realizar operaciones; situaciones de medida con cantidades continuas, por ejemplo. Tras esta identificación es posible pasar a realizar acciones con representaciones no enteras de objetos, siempre identificando claramente la unidad a la que se refieren las fracciones con las que se opera.

La **segunda** etapa consiste en realizar las acciones que encierran los problemas: resolver problemas aditivos de los estudiados en el apartado 1 del capítulo 10, incluyendo algunos datos no enteros.

Problemas de cambio *(Tenía 2 Kg de manzanas y he comprado medio kilo. ¿Cuántas manzanas tengo?; Juan tenía 4 € pero pierde 1,5 €. ¿Cuánto le queda?)*, de combinación *(El programa de televisión dura una hora, pero si un cuarto de hora son anuncios, ¿cuánto dura el programa sin anuncios?)*, o de comparación *(María tiene 7 € y Juan tiene 0,5 € menos que María. ¿Cuán-*

© Ediciones Pirámide

tos euros tiene Juan?). Emplear representaciones de monedas u objetos facilita realizar las acciones que resuelven estos problemas.

Para resolver estos problemas mediante acciones ayuda emplear diagramas de sectores que representen las fracciones. Poner uno a continuación del otro, o sobre el otro, para eliminar una parte del primero, permite obtener relaciones concretas de las operaciones aditivas. Se comienza con fracciones de igual denominador (reunir cuartos de hora o medios kilos, por ejemplo). A continuación se incluye alguna fracción que sea fácilmente convertible al mismo denominador (al sumar tercios de litro con sextos de litro, pasamos por la conversión de tercios en sextos, 1/3 = 2/6).

Las operaciones con objetos concretos, como los sectores o los trozos del puzle de fracciones, permiten problemas aditivos más complejos, en los que realizar la acción de juntar o de retirar/comparar, buscando la pieza que rellena el trozo obtenido (figura 11.17). En este caso se trata de que los alumnos manipulen, realicen la acción aditiva correspondiente y busquen un trozo que muestre el resultado, aceptando que den aproximaciones. En la figura 11.17 un alumno ha identificado que $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$, que, aunque no es exacto, muestra una aproximación.

La **tercera** etapa consiste en expresar las igualdades detectadas con objetos, por medio de representaciones de fracciones y decimales, apreciando la relación entre la actuación con modelos y materiales, y los elementos representados (cuartos de kilo o cuartos de hora).

En las etapas anteriores se identifican los problemas, se realizan acciones y se representan. Afianzando estas destrezas, estamos en condiciones de plantear algunas operaciones en forma simbólica, siempre y cuando se haya dado sentido a esa expresión simbólica. Se puede comenzar planteando tareas en las que aparezcan

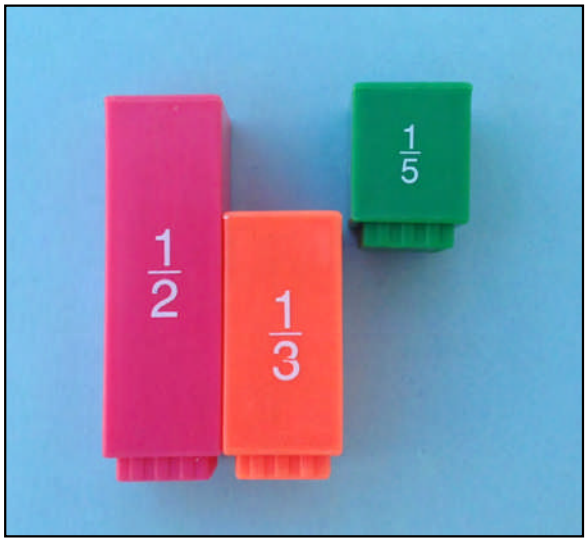


Figura 11.17.—Resta por trozos.

las operaciones en el enunciado, para que los alumnos las traduzcan a situaciones reales o a acciones. *En el frigorífico hay 0,5 Kg + 2 Kg de manzanas (lo que había y lo que he comprado). ¿Cuántos kilos de manzanas hay?*

Resolver problemas de este tipo requiere que los escolares identifiquen las representaciones, que transformen las operaciones en acciones o que realicen las acciones si lo necesitan, antes de expresar el resultado por medio de una fracción. El siguiente paso consiste en expresar estas operaciones por medios simbólicos y, únicamente en este momento, buscar qué fracción expresa el resultado.

Sólo cuando estas acciones están asimiladas podemos plantear situaciones operatorias de manera simbólica. Se promoverá que formulen problemas que lleven a estos cálculos y procedan primero a obtener la porción, y posteriormente buscar la expresión fraccionaria que representa, dejando clara la unidad a la que se refieren las fracciones. Ello debe ir acompañado de problemas de fraccionamiento que den

© Ediciones Pirámide

sentido a las actuaciones con materiales. En los capítulos 8 y 9 del libro *Matemáticas para maestros* (Segovia y Rico, 2011) se describen procedimientos para realizar las operaciones empleando modelos.

ACTIVIDAD 5: Resuelve el siguiente problema realizando los dos pasos previstos (obtener la porción resultado e identificar la fracción que representa este resultado). Emplea para ello una representación de las fracciones mediante papel cuadriculado, representando la pizza mediante un rectángulo.

Determinar qué porción de pizza nos hemos comido, si mi hermano se ha comido media pizza y yo un tercio de pizza.

3.3. Etapas en la enseñanza de operaciones multiplicativas con racionales

Las operaciones multiplicativas sólo se deben introducir en la enseñanza Primaria, delimitando notablemente su empleo y simbolización. Vamos a distinguir tres etapas en su enseñanza: *a*) identificación de operaciones multiplicativas entre fracciones y números enteros; *b*) buscar y realizar situaciones que corresponden a multiplicaciones (fracción de fracción y cálculo de áreas), y divisiones (comparación de porciones), y *c*) realizar cálculos simbólicos.

a) No es fácil identificar situaciones que requieran operaciones multiplicativas con números no enteros, salvo situaciones de suma, repitiendo el mismo sumando no entero. Es decir, problemas de multiplicación de enteros por racionales, como: «He tardado un cuarto de hora en resolver cada ejercicio de matemáticas. Como tenía 3 ejercicios, ¿cuánto he tardado en resolverlos?».

Igualmente se pueden identificar problemas multiplicativos de división con repartos de un racional en partes iguales. Por ejemplo, «Determinar qué porción de tarta se ha comido cada uno de tres niños, si se han repartido media tarta entre los tres, a partes iguales». Estos problemas aparecen como extensiones de los problemas aditivos, o de problemas de fraccionamiento.

b) Para introducir situaciones multiplicativas de números no enteros habrá que *buscar problemas en los que interesen* esas situaciones. Conviene trabajar ampliamente los problemas de fraccionamiento en los que la fracción actúe como operador.

Posteriormente realizar fraccionamientos consecutivos, utilizando unidades que permitan realizar los dos fraccionamientos. Para obtener la mitad de un cuarto emplear modelos gráficos de áreas, en papel cuadriculado, tomando como unidad un rectángulo que permita hacer cuartos y medios. También se pueden realizar fraccionamientos de la unidad de partida: $\frac{1}{4}$ de 1.000 gramos son 250 gramos; $\frac{1}{2}$ de 250 gramos son 125 gramos, la mitad de cuarto de kilo son 125 gramos; es decir, $\frac{125}{1.000}$ de kilo. De esta forma estaremos introduciendo el sentido más general de la multiplicación de fracciones, el de «fracción de fracción».

Resulta más complejo realizar con sentido la multiplicación referida al cálculo del área de un rectángulo. Sólo a partir de materiales como las transparencias de fracciones, el puzle de fracciones o el papel cuadriculado, podemos mostrar que el área de un rectángulo de lados medio dm. y un cuarto de dm. es un octavo de dm^2. Se pueden encontrar procedimientos para obtener estas operaciones en los capítulos 8 y 9 del libro *Matemáticas para maestros* (Segovia y Rico, 2011).

© Ediciones Pirámide

En Educación Primaria conviene afianzar la idea de fracción de fracción y de cálculo de área, e identificar las dos con la expresión simbólica del producto de fracciones, más que pretender abarcar la generalidad que supone el producto de fracciones como expresión simbólica. Se trata de realzar la resolución de problemas de enunciado verbal, con significado concreto, sobre la idea de obtener el resultado de una multiplicación de racionales, sin una correspondencia concreta y significativa.

Para la idea de división conviene trabajar problemas de comparación de porciones reales. Determinar qué porción de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$ se puede realizar expresando estas porciones mediante modelos o materiales, examinando cuántas veces una contiene a otra, para llegar a la expresión de la fracción representante de esta comparación. El papel cuadriculado permite obtener ambas porciones de una unidad conocida (un rectángulo de 2×4, por ejemplo), y apreciar que es la mitad. Como en la multiplicación, introducimos la comparación de fracciones sencillas antes de la división de fracciones.

En resumen, la fase de acción de la enseñanza de las operaciones multiplicativas con los números racionales comienza dándole sentido.

c) Durante las etapas descritas conviene escribir las operaciones en su forma simbólica, siempre asociada a la expresión verbal de las acciones realizadas: «Mitad de tres cuartos» corresponde a $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, es decir a «$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$». Calcular «qué porción de $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{2}$» equivale a realizar la división $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$. De esta forma estamos entrando en el cálculo simbólico básico.

Durante la realización de las acciones que corresponden a estas operaciones conviene relacionar los datos con el resultado. Empleando el modelo de área, la acción ha mostrado que para obtener «mitad de tres cuartos de kilo» hemos tenido que dividir el kilo en 8 partes, apreciando que la cantidad de partes coincide con el producto de los denominadores. Igualmente, el número de partes que tomamos corresponde con el producto de los numeradores. Cuando se calcula el área de un rectángulo de lados a $\frac{1}{2}$ m. y $\frac{3}{4}$ m., principalmente si se usan las transparencias de fracciones, se aprecia que el metro cuadrado se divide en 8 partes y de ellas se toman 3. De esta forma se relaciona el denominador de la multiplicación de fracciones $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. El comienzo de la enseñanza de la simbolización multiplicativa consiste en asociar acciones a símbolos, y apreciar relaciones entre los términos de los factores y los del producto.

Darle significado a la simbolización de la división es difícil, tanto por lo poco usual de los problemas que requieran dividir fracciones, como por la distancia entre el procedimiento simbólico de dividir (multiplicar en cruz las fracciones, o multiplicar por el inverso) y los cálculos requeridos por las acciones. Como paso intermedio es recomendable plantear situaciones de comparación que puedan abordarse con más facilidad: fracciones de igual denominador (¿Qué porción de ¾ es ¼?), o que sean fácilmente convertibles a igual denominador (¿Qué porción de ¾ es ½?). En estos casos las porciones correspondientes son más fáciles de comparar y permiten apreciar que el resultado es la fracción formada por los numeradores $\left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3 = \frac{3}{1}; \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{3}{2}\right)$. Llegar a los algoritmos tradicionales resulta más complicado en la división que en la multiplicación.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 6: Busca ejercicios de enunciado en libros de texto de Primaria, que correspondan a multiplicaciones y divisiones de fracciones. Estudia los tipos de problemas planteados. Sitúa estos problemas en relación a las etapas propuestas en el tema 10 para la enseñanza de las operaciones multiplicativas.

3.4. Dificultades y errores en el aprendizaje de las operaciones con racionales

Las principales dificultades del aprendizaje de las operaciones con racionales provienen de la complejidad de los conceptos de fracción y de número decimal, aunque las más frecuentes en los alumnos tienen una procedencia ligada a la enseñanza prematura de los algoritmos de cálculo.

Dificultades ligadas a la complejidad procedimental de las operaciones

Con anterioridad se han destacado las dificultades del concepto de fracción. Identificar claramente la unidad a la que se refiere la fracción y realizar adecuadamente una división igualitaria y exhaustiva de dicha unidad, tiene una entidad que se manifiesta también en el aprendizaje de sus operaciones. Igualmente, la dificultad de captar las expresiones de los números racionales como una nueva entidad, y no como dos números naturales (separados por la raya de fracción o por la coma, en los decimales), constituyen dificultades conceptuales.

La principal dificultad con las fracciones consiste en identificar la unidad o el todo de la fracción. Si el alumno emplea la fracción sin aludir a su unidad de referencia, no estará considerando que la fracción representa una relación entre cantidades. Esta dificultad da lugar a errores en operaciones con fracciones, que comienzan al representar unidades distintas para obtener el resultado de operaciones aditivas.

Sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ da lugar a error si se representan las fracciones en distintas unidades, como aparece en la figura 11.18.

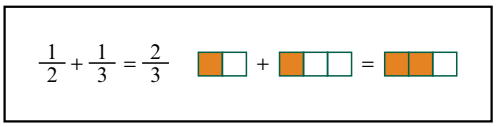


Figura 11.18.—Error en la suma de fracciones a causa de emplear unidades diferentes.

Las operaciones multiplicativas con racionales requieren emplear varias unidades, por lo que las dificultades conceptuales son aún mayores. De hecho, la primera dificultad arranca de la necesidad de cambiar de unidad en la multiplicación del tipo fracción de fracción, lo que repercute tanto en la actuación con objetos y modelos como en la posterior identificación de la unidad del resultado.

Pueden aparecer errores debidos a esta dificultad, como los que llevan a que no se sepa identificar el resultado de la operación, incluso realizada a través de modelos (véase figura 11.19).

Aunque se emprenda su enseñanza por medio del fraccionamiento, las operaciones presentan dificultades debido a la diversidad de formas de expresar las operaciones con números racionales. A las dificultades señaladas en las operaciones con naturales se unen las ligadas a la diversidad de formas de expresar las relaciones multiplicativas entre números racionales. Así, se suelen identificar enunciados

© Ediciones Pirámide

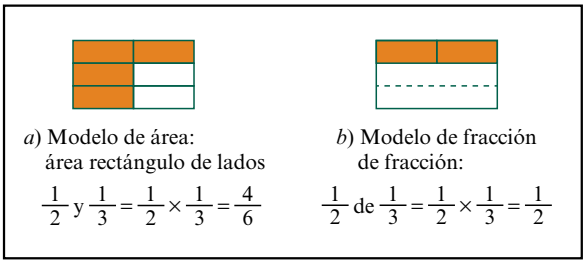


Figura 11.19.—Errores en la multiplicación de fracciones empleando modelos.

como «¿qué porción de $\frac{1}{2}$ son $\frac{2}{3}$?» $\left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}\right)$, con «¿cuánto es la mitad de $\frac{2}{3}$?» $\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)$. Recurrir a expresiones posibles entre naturales parece un recurso interesante para apreciar el significado de frases como las anteriores. («¿Qué porción de 8 es 4?», no es lo mismo que «¿cuánto es la octava parte de 4?».)

Dificultades debidas a obstáculos

Es frecuente que un error de conceptualización de las fracciones, representantes de números racionales, pueda repercutir en las operaciones. Considerar las fracciones como números naturales, separados por una línea fraccionaria, sin atender a su relación, puede producir algunos de los errores frecuentes en la suma de fracciones, como por ejemplo que la identifiquen con la suma de numeradores y denominadores.

También se produce un obstáculo al querer partir de la multiplicación de números naturales para entender la multiplicación de números racionales. El hecho de introducir la multiplicación mediante sumas reiteradas podría generar un conflicto cuando la multiplicación se extiende a los números racionales. En este caso, la expresión «veces» pierde su sentido intuitivo. Por tanto, el profesor ha de estar atento para identificar operaciones multiplicativas de manera adecuada. En general, en esta dificultad confluyen otras relacionadas con el concepto de número decimal y número racional, señaladas en la primera parte de este capítulo.

ACTIVIDAD 7: Busca situaciones cotidianas en que se aprecien propiedades que contradigan las expresadas (el resultado de la multiplicación es mayor que los factores, el cociente es menor que el dividendo, en la división siempre es mayor el dividendo que el divisor, etcétera).

La abundancia de experiencias en el dominio de los naturales puede convertirse en un obstáculo cuando se pretenden generalizar al dominio de los números racionales. Propiedades como que el resultado de la multiplicación es mayor que las cantidades multiplicadas, o que el cociente de una división es menor que el dividendo, o que la división se realiza siempre de un número más grande entre otro más pequeño, se convierten en obstáculos para las operaciones multiplicativas entre racionales menores que la unidad, y son fuente de errores en los escolares.

Dificultades debidas a la enseñanza

Si se hace que los alumnos se enfrenten al trabajo simbólico y algebraico (por ejemplo, operaciones con fracciones por medio de los algoritmos), sin estar afianzado el concepto de fracción, aparecerán con más facilidad los errores consignados, que repercuten tanto en el concepto de fracción como en sus operaciones. Las dificultades conceptuales y los obstáculos presentados hacen que sea recomendable que los escolares realicen una gran

© Ediciones Pirámide

cantidad de actividades concretas, y que representen operaciones aditivas y multiplicativas con racionales, antes de aprender los algoritmos para obtener el resultado de dichas operaciones.

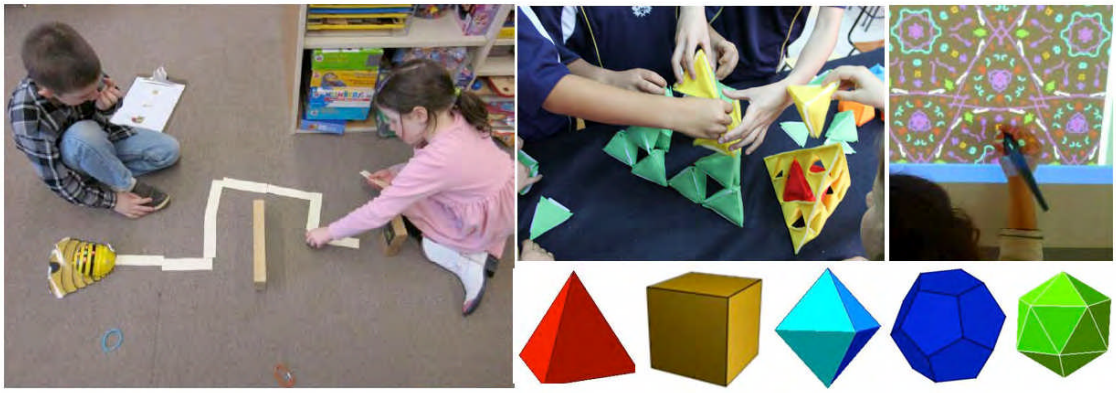
ACTIVIDAD 8: Busca en libros de texto de 6.º curso de Primaria la forma en que se introducen las operaciones con fracciones. Identifica si favorecen dificultades como las señaladas en este último apartado.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de la geometría

12

ISABEL M.ª ROMERO ALBALADEJO
MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO



La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria responde a varios motivos. Por un lado, destacamos su vinculación con el entorno y con otras materias escolares, como el conocimiento del medio, la educación artística y la educación física. Por otro lado, gran parte de los modelos numéricos, métricos y de organización de la información son esencialmente visuales y espaciales; en consecuencia, la comprensión de diversos temas matemáticos va ligada al entendimiento y manejo de elementos geométricos. Además, debido a las experiencias tempranas de los escolares, sus conocimientos geométricos y espaciales exceden a sus destrezas numéricas en muchos casos, sobre todo en los primeros niveles educativos. Todo ello se puede aprovechar para motivar a los alumnos en otros temas a través de la geometría.

La importancia de la geometría es patente en los currículos oficiales, tanto nacionales como internacionales. Sin embargo, sus contenidos son usualmente relegados en las aulas de Educación Primaria, por favorecer otros contenidos algorítmicos, aritméticos o algebraicos. En general, la geometría se aborda a través de la enseñanza memorística de algunas nociones básicas y la exploración mecánica de propiedades de figuras, normalmente de forma inconexa, para llegar con demasiada rapidez al cálculo estandarizado de áreas y volúmenes.

Los expertos consideran que el aprendizaje de la geometría proporciona a los alumnos de Educa-

© Ediciones Pirámide

ción Primaria un dominio del entorno, al familiarizarles con un campo que les suministra conceptos y relaciones para estructurar el espacio. Mediante la geometría, los escolares desarrollan una serie de capacidades que caracterizan lo que se denomina «pensamiento o razonamiento geométrico». El estudio del espacio y de las formas debe partir del mundo y de los objetos que les rodean. Las actividades que se propongan a los escolares deben permitirles explorar, manipular, construir y experimentar, despertando así su sentido espacial. Asimismo, es fundamental plantear cuestiones que les ayuden a percibir y visualizar objetos y formas, a describirlos y representarlos, analizarlos y relacionarlos, a compararlos y clasificarlos, a encontrar e inducir sus propiedades, a justificarlas y comprobarlas; en definitiva, a razonar geométricamente.

Consideramos necesario que los estudiantes para maestro conozcan el potencial que tiene la geometría para la formación matemática de sus futuros alumnos y dispongan de conocimientos y herramientas para promover su desarrollo. Nuestro propósito es contribuir a ello mediante las distintas secciones de este capítulo. En primer lugar, presentamos objetivos y expectativas de aprendizaje acordes con propuestas curriculares recientes. A continuación exponemos modelos que ayudan a explicar cómo los alumnos aprenden geometría y proporcionan pautas para su enseñanza. Describimos dificultades y errores en los que pueden incurrir los escolares, al tiempo que damos indicaciones para detectarlos y atenderlos adecuadamente. Por último, consideramos diversos materiales y recursos para las clases de geometría, así como tareas que pueden realizarse con ellos.

© Ediciones Pirámide

1. FOCOS DE CONTENIDO

La geometría es uno de los cuatro bloques que estructuran el contenido matemático en el currículo español de Educación Primaria. Tradicionalmente, los contenidos geométricos se organizan, a su vez, en torno a tres grandes temas o focos de contenido: *a*) la situación en el plano y en el espacio; *b*) las formas planas y espaciales, y *c*) las regularidades y transformaciones isométricas.

1.1. La situación en el plano y en el espacio

De acuerdo a las componentes del sentido espacial descritas en el capítulo 6, este foco aborda los contenidos correspondientes a la orientación, dentro de las destrezas de visualización, así como a elementos de movimiento y orientación, dentro de los elementos geométricos. Según directrices curriculares recientes, son contenidos (conceptuales y procedimentales) de este foco:

- Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia, por medio de adverbios de lugar.
- Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios. Elaboración de éstos e identificación de sus elementos.
- Las líneas como recorrido: rectas y curvas, intersección de rectas y relaciones entre rectas: paralelismo, incidencia y perpendicularidad.
- Identificación de ángulos en el entorno y en distintas posiciones; tipos de ángulos; relaciones entre ángulos; ángulos como barrido y como rotación en torno a un punto.
- Representación elemental del espacio: planos, maquetas, escalas y gráficas sencillas.
- Posicionamiento y referencias. Sistema de coordenadas cartesianas.

1.2. Formas planas y espaciales

Este foco identifica aquellos contenidos relacionados con las componentes del sentido espacial correspondientes a los elementos geométricos, sus relaciones y la visualización. Dichos contenidos son:

- Identificación de formas planas y espaciales en el entorno cotidiano.
- Figuras planas; polígonos; circunferencia y círculo.

© Ediciones Pirámide

- Cuerpos geométricos: cubos, esferas, prismas, pirámides y cilindros.
- Descripción de formas utilizando vocabulario geométrico apropiado.
- Identificación de elementos de figuras planas y espaciales: vértices, ángulos, lados, aristas, caras, radio, diámetro, diagonales.
- Representación, construcción, manipulación y transformación de figuras planas y cuerpos geométricos, a través de desarrollos planos, bloques, papel, programas informáticos, instrumentos de dibujo y otros materiales didácticos. Relaciones entre figuras.
- Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando criterios elementales: número de lados, de caras, de vértices y de aristas, concavidad/convexidad, regularidades y otros invariantes.

1.3. Regularidades e isometrías

En este foco se tratan aquellos contenidos correspondientes a los movimientos, las relaciones y la visualización, del sentido espacial. Dichos contenidos son:

- Identificación de regularidades en figuras y cuerpos.
- Descripción de tamaños, posiciones y orientaciones de figuras sometidas a transformaciones isométricas (traslaciones, simetrías y giros) y de semejanza (ampliaciones y reducciones).
- Elementos e invariantes que caracterizan a las traslaciones, simetrías y giros (distancias, ejes, centro, amplitud y sentido de giro).
- Examen de la congruencia, similitud, simetría axial o rotacional de objetos usando transformaciones.

1.4. Objetivos del bloque de geometría según focos del contenido

Para cada uno de los focos de contenido presentados se establecen unos objetivos de aprendizaje, que desglosamos en términos de capacidades y que se espera que los alumnos desarrollen a lo largo de la Educación Primaria. Se han elaborado a partir de directrices curriculares nacionales e internacionales recientes, y quedan recogidos en la tabla 12.1.

TABLA 12.1

Objetivos y capacidades de los tres focos de contenido

Objetivos	Capacidades
Situación en el plano y en el espacio	
• Describir posiciones, orientaciones y movimientos, respecto a uno mismo y a otros sistemas de referencia.	• Utilizar vocabulario apropiado (adverbios de lugar, rectas, curvas, distancias, ángulos, paralelismo, perpendicularidad...) para describir posiciones, movimientos y relaciones espaciales. • Describir verbalmente itinerarios, interpretar y elaborar croquis.
• Representar e interpretar posiciones, movimientos y relaciones espaciales, mediante lápiz y papel, programas informáticos, robots de posición, etc.	• Elaborar planos, maquetas, escalas y gráficas sencillas que representen posiciones y relaciones en el espacio. • Manejar el sistema de coordenadas cartesianas.

© Ediciones Pirámide

TABLA 12.1 *(continuación)*

Objetivos	Capacidades
Situación en el plano y en el espacio	
• Identificar, enunciar y resolver problemas relacionados con la ubicación espacial en el entorno cotidiano.	• Utilizar los contenidos de este foco para comprender y emitir informaciones diversas, encaminadas a resolver problemas cotidianos de ubicación espacial.
Formas planas y espaciales	
• Analizar características e identificar propiedades de las formas geométricas planas y espaciales. • Relacionar dos o más figuras que compartan o difieran en una determinada propiedad.	• Identificar figuras planas y cuerpos geométricos en la vida cotidiana. • Reconocer y describir las características de formas geométricas utilizando vocabulario geométrico apropiado en cada etapa. • Mostrar curiosidad e interés por la identificación de las formas, sus elementos característicos, sus propiedades y las relaciones entre ellas.
• Representar y construir formas geométricas que cumplan, o no, determinadas propiedades.	• Utilizar papel, programas informáticos, instrumentos de dibujo y otros materiales, para representar, construir y explorar formas geométricas planas y espaciales. • Interpretar representaciones planas de formas espaciales. • Identificar formas espaciales desde distintas perspectivas.
• Desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.	• Investigar, describir y razonar sobre los resultados de subdividir y combinar formas geométricas. • Comparar y clasificar figuras planas y cuerpos geométricos con criterios elementales. • Formular y probar conjeturas sobre propiedades y relaciones y desarrollar argumentos para formular conclusiones.
• Identificar, enunciar y resolver problemas de formas planas y espaciales.	• Reconocer elementos y relaciones geométricas en situaciones cotidianas y en otras disciplinas, y aplicarlas a la resolución de problemas que se presentan en dichas situaciones.
Regularidades e isometrías	
• Percibir y analizar regularidades en las formas geométricas.	• Identificar y describir regularidades en formas geométricas planas y espaciales a partir de la manipulación de objetos (espejos, plegado de papel, objetos cotidianos...). • Identificar elementos característicos de dichas regularidades. • Clasificar formas geométricas a partir de sus regularidades.

© Ediciones Pirámide

TABLA 12.1 *(continuación)*

Objetivos	Capacidades
Regularidades e isometrías	
• Reconocer y aplicar isometrías (traslaciones, simetrías y giros) para captar regularidades y congruencia entre figuras planas.	• Describir tamaños, posiciones y orientaciones de las figuras sometidas a transformaciones, como traslaciones, giros o escalas. • Reconocer figuras que se hayan construido mediante traslaciones, simetrías y giros de otras figuras dadas. • Predecir los resultados de trasladar, voltear y girar formas planas. • Construir figuras mediante traslaciones, simetrías y giros de otras figuras dadas, utilizando papel isométrico, papel de seda, geoplano, programas informáticos… • Describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos figuras son congruentes.
• Distinguir las isometrías de transformaciones no congruentes.	• Distinguir las isometrías de otras transformaciones, como las ampliaciones y reducciones.
• Reconocer la estética y la funcionalidad de las regularidades geométricas en contextos reales.	• Apreciar la contribución de las regularidades a la estética, a las creaciones artísticas y a los objetos técnicos. • Crear formas que tengan simetría.

1.5. Secuenciación de los contenidos del bloque de geometría

Si atendemos a la secuenciación según los tres ciclos que estructuran la enseñanza primaria, encontramos en el primer ciclo que los escolares deben explorar los conceptos geométricos de manera informal e intuitiva en el entorno cotidiano, utilizando material manipulativo para experimentar y, a partir de un vocabulario intuitivo propio, desarrollar progresivamente un vocabulario geométrico más elaborado y adecuado. En el segundo ciclo, los escolares han de describir elementos geométricos de forma cada vez más detallada y precisa; seguirán utilizando material manipulativo para explorar propiedades, comparar, clasificar y realizar conjeturas; resolver problemas geométricos sencillos, explicando los procesos seguidos, y las representaciones de diverso tipo y los programas informáticos deben introducirse para elaborar conceptos geométricos que conecten lo concreto con lo abstracto. En el tercer ciclo debe potenciarse el uso de representaciones cada vez más abstractas, así como las conexiones entre el repertorio de contenidos geométricos que los alumnos manejan y las competencias de razonamiento, explicación y argumentación, dentro de los procesos de resolución de problemas.

Actividad 1:

a) Consulta los documentos curriculares actuales de Educación Primaria e identifica los ciclos en que se trabajan los distintos contenidos correspondientes a cada uno de los focos.

© Ediciones Pirámide

b) Busca en libros de texto de matemáticas de 3.º y 4.º de Educación Primaria de una misma editorial los temas correspondientes al bloque de geometría. Relaciona los contenidos que se tratan con los que indican los documentos curriculares del ciclo.

2. EL MODELO DE VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA- APRENDIZAJE DE LOS CONTENIDOS GEOMÉTRICOS

En la actualidad, el modelo de Van Hiele es un marco de referencia para abordar el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Fue desarrollado por los esposos holandeses Dina y Pierre Marie Van Hiele a finales de los años cincuenta, y sigue estando vigente en la actualidad. Dicho modelo tiene, por una parte, carácter descriptivo y, por otra, carácter prescriptivo. Es descriptivo porque intenta explicar e interpretar el aprendizaje de los conceptos geométricos mediante una serie de niveles de razonamiento progresivos. Es prescriptivo, por cuanto propone unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza que permiten pasar de un nivel al siguiente.

2.1. Características del modelo

Para entender el modelo Van Hiele de aprendizaje y enseñanza de la geometría es preciso tener en cuenta las siguientes características del modelo:

- *Carácter secuencial.* No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento. Por ejemplo, para que un escolar esté en el nivel tres de razonamiento, necesariamente tiene que haber superado los niveles uno y dos.
- *Carácter progresivo.* El progreso de un nivel a otro, o la falta de éste, depende del contenido y de los métodos de instrucción empleados, no de la edad del escolar.
- *Carácter cíclico.* Un mismo concepto puede ser tratado con distinta profundidad, de acuerdo con el nivel en que se esté trabajando.
- *Uso del lenguaje.* El uso del lenguaje es fundamental, ya que los niveles y la progresión a lo largo de ellos están estrechamente vinculados a la comunicación y al dominio del vocabulario geométrico adecuado. Una forma de expresión adecuada para un nivel puede no serlo en el nivel siguiente.
- *Significatividad.* Si los escolares están en un nivel y la enseñanza del maestro, el contenido, los materiales, el vocabulario, etc., son propios de un nivel superior, se producirá un desajuste, que provocará que el escolar no sea capaz de seguir los procesos de pensamiento requeridos, de modo que no podrá progresar de forma adecuada.

2.2. Niveles de razonamiento

El modelo Van-Hiele considera cinco niveles de razonamiento. Se suelen numerar del 0 al 4 y reciben los nombres que presentamos a continuación.

- Nivel 0. Visualización o reconocimiento.
- Nivel 1. Análisis.
- Nivel 2. Deducción informal.
- Nivel 3. Deducción formal.
- Nivel 4. Rigor.

Un escolar puede estar, según el contenido que trabaje, en un nivel u otro distinto. A conti-

© Ediciones Pirámide

nuación describimos los dos primeros niveles, que son los predominantes en Educación Primaria.

Nivel 0. Visualización

Los objetos de pensamiento en este nivel son figuras que se conciben por su apariencia y de forma global, sin reconocer sus partes ni sus elementos. Por ejemplo, en una clase de primero de Educación Primaria se pidió a los escolares que identificaran triángulos en el aula, y muchos repararon en una escuadra y un cartabón de madera apoyados en la pizarra. Todos estuvieron de acuerdo en que la escuadra era un triángulo, pero no estaban seguros de que el cartabón también lo fuera. El argumento que algunos niños esgrimieron fue que el cartabón era un triángulo «porque se parecía a un triángulo». No se aprecian las propiedades determinantes de las figuras (como la de ser un polígono de tres lados, en el caso del triángulo) y, por ello, se suelen incluir atributos no esenciales al describirlas (es «alargado»).

Los escolares en este nivel deben aprender vocabulario geométrico básico, identificar figuras como triángulos, cuadrados, círculos, rectángulos, óvalos, conos, cilindros, esferas, etc. También pueden reproducir estas figuras mediante dibujos, geoplanos, palillos, plastilina y otros recursos manipulativos.

Actividades propias del nivel 0

En este nivel, los escolares han de trabajar la identificación de formas geométricas básicas en diversos contextos: objetos cotidianos, dibujos simples o más complejos, dentro de otras formas, en una variedad de orientaciones, etc. Puesto que los objetos del entorno son tridimensionales, tiene más sentido que los escolares inicien su trabajo y se familiaricen primero con cuerpos geométricos básicos, como esferas, cilindros, conos, pirámides o prismas, identificándolos y explorando sus propiedades (los cilindros ruedan, los prismas pueden apilarse y las esferas no...), y después pasen a las figuras del plano. Las formas planas pueden reconocerse, en otros contextos, como parte de las tridimensionales. Una manera de hacerlo es a través de la estampación; se puede aprovechar la ocasión para pedir a los alumnos que predigan qué objeto marcará alguna figura conocida, cuántas marcas de formas diferentes se pueden hacer con cada cuerpo, o bien trabajar con puzles para encajar cuerpos por aberturas apropiadas.

La identificación de isometrías en movimientos cotidianos es objeto de trabajo en este nivel (por ejemplo, deslizarse por un tobogán, montarse en una noria o hacer angelitos en la arena moviendo brazos y pies). También se trabaja en este nivel con la detección de propiedades visuales, como la «colocación igual» de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros y la visión del eje de simetría como separador «por la mitad» de dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación de éstas.

Las descripciones verbales y gráficas de posiciones e itinerarios pueden trabajarse en contextos de dramatización, mediante cuentos e historias, o con programas informáticos y robots de posición a los que se pueden programar instrucciones sencillas (adelante-atrás, derecha-izquierda).

La creación es importante: construir formas geométricas y composiciones de éstas, de itinerarios, de diseños con regularidades, recortes sobre papel doblado, manchas de pintura o de tinta, entre otros. El uso de materiales es fundamental para ello.

En todo momento las preguntas del maestro son una clave que permitirá que los alumnos expresen y desarrollen sus ideas en lenguaje cotidiano (bolas, esquinas, dados, vueltas, al revés...) y adquieran un lenguaje geométrico adecuado (esfera, círculo, ángulo, cubo, giro, simétrico...).

© Ediciones Pirámide

Nivel 1. Análisis

En el nivel 1 se comienzan a discernir las características de las figuras a través de la observación y la experimentación. El razonamiento incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de algunos casos particulares. Dichas propiedades surgen al identificar características comunes que conceptualizan clases de figuras. Por ejemplo, se puede percibir que los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos y dos pares de lados iguales. Las figuras poligonales se conciben como un conjunto de elementos geométricos (lados, ángulos, vértices, diagonales) que se relacionan. Aunque un escolar sea capaz de identificar y enumerar un listado de propiedades convenientes, no llega a enunciar definiciones correctas, ya que pueden faltar condiciones necesarias e incluir otras irrelevantes. Identificar propiedades también consiste en distinguir dos figuras por una propiedad, que cumple una de ellas y que no cumple la otra.

En este nivel no se relacionan unas propiedades con otras. Por ejemplo, cuando se identifica un cuadrado, se piensa en «algo» cuya frontera son cuatro líneas que poseen una serie de características, como ángulos rectos, igualdad de lados, paralelismo entre lados, diagonales iguales, etc., pero no se aprecia, por ejemplo, que la igualdad de diagonales es consecuencia de la igualdad de ángulos.

Tampoco pueden relacionarse unas clases de figuras con otras, ni se pueden hacer clasificaciones lógicas, de modo que las clasificaciones en este nivel suelen ser excluyentes. Por ejemplo, se entiende una clasificación de los triángulos según la igualdad de los lados (equiláteros, isósceles o escalenos). Pero si los escolares han aprendido previamente una clasificación excluyente de los triángulos, es posible que no acepten una modificación de la definición de triángulo isósceles como triángulo con *al menos dos lados iguales,* que implicaría que los triángulos equiláteros se considerasen como un caso particular de los isósceles, dando lugar a una clasificación inclusiva.

Actividades propias del nivel 1

Las actividades de este nivel deben propiciar que los escolares describan, cada vez con mayor precisión, las propiedades y elementos de figuras, movimientos y posiciones. Por ejemplo, describir cuerpos geométricos para que otro compañero los identifique dentro de un conjunto; describir los movimientos que necesitan para mostrar la congruencia de dos figuras (girar 90° la figura, o reflejarla verticalmente y luego girar 180°); o, dado un plano de un barrio, describir qué trayectoria hay que realizar para pasar por distintos puntos, o para minimizar la distancia recorrida (utilizando puntos cardinales, tipos de ángulos, relaciones de perpendicularidad y paralelismo).

Se han de caracterizar clases de figuras atendiendo a sus propiedades. Por ejemplo, encontrar para distintos cuerpos geométricos el conjunto de huellas que permiten identificarlos sin ambigüedad, o descubrir propiedades de las isometrías a partir de su verificación en casos concretos (igualdad de los vectores que unen los puntos de una figura y sus respectivas imágenes por una traslación; equidistancia y perpendicularidad al eje de simetría de los segmentos que unen los puntos y sus imágenes en una simetría).

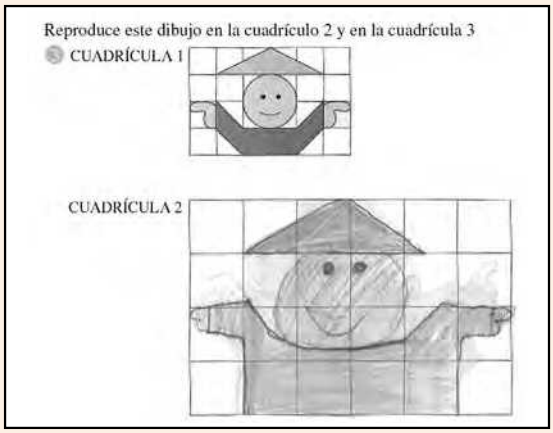
Además, las tareas que se propongan a los alumnos deben estimularlos para inducir empíricamente reglas y generalizaciones. Por ejemplo, dibujar triángulos dadas las medidas de sus lados y conjeturar qué relación debe haber entre las medidas de los lados para que pueda formarse un triángulo; o bien, mediante un programa de geometría dinámica, explorar y formular conjeturas sobre qué ocurre al componer transformaciones

© Ediciones Pirámide

isométricas (cuando una figura se refleja sobre una recta y la imagen resultante se refleja sobre otra recta distinta, ¿cómo será la imagen resultante si ambas rectas son paralelas? ¿Y si se cortan?).

ACTIVIDAD 1: Busca actividades de geometría para Educación Primaria e identifica el nivel de razonamiento al que se asocia cada una. Justifica tus respuestas. (A este efecto se pueden utilizar también las del apartado 4 de este capítulo).

ACTIVIDAD 2: ¿Qué cuestiones plantearías a un alumno que ha realizado la tarea siguiente para ayudarle a avanzar en el nivel de análisis?



2.3. Fases del modelo de Van Hiele

El conocimiento inicial de un estudiante —conceptual y procedimental— determina su nivel de partida sobre un contenido. La enseñanza debe ir orientada a lograr los conocimientos del siguiente nivel. El paso de un nivel al siguiente determina el aprendizaje alcanzado.

El modelo de Van Hiele enfatiza la idea de que el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez del escolar. Da gran importancia al diseño de tareas y actividades, a los materiales utilizados y la organización de la secuencia de enseñanza-aprendizaje. Se recomienda que dicho proceso se organice siguiendo cinco fases.

1. *Indagación.* El maestro averigua, mediante preguntas y actividades básicas, qué saben los alumnos sobre el tema que se va a abordar, y los alumnos entran en contacto con el objetivo de ese nivel para el tema en cuestión.
2. *Orientación dirigida.* El docente propone actividades que ha elaborado y secuenciado cuidadosamente. A través de ellas, los alumnos han de trabajar para encontrar y construir los elementos fundamentales del tema, en el nivel en que se encuentran.
3. *Explicitación.* Las actividades deben propiciar que los alumnos expresen, verbalmente y por escrito, lo que han descubierto y elaborado en la fase previa, intercambiando resultados y observaciones.
4. *Orientación libre.* Las actividades deben permitir a los alumnos resolver situaciones nuevas con los conocimientos que se adquirieron previamente. Son adecuadas las situaciones abiertas, en las que deben decidir qué hacer en cada momento, establecer conjeturas, verificarlas o refutarlas, etc.
5. *Integración.* Los alumnos analizan y resumen lo que han aprendido, con objeto de tener una perspectiva nueva y más amplia de la nueva red de hechos, conceptos y relaciones que han trabajado. La labor del maestro se hace aquí imprescindible para ayudar en la síntesis de los resultados más destacados. Asimismo, debe exigir la memorización de los resultados fundamentales.

© Ediciones Pirámide

3. DIFICULTADES Y ERRORES

Exponemos una serie de dificultades y errores que suelen presentarse en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría en Educación Primaria. Organizamos los errores en torno a tres tipos de dificultades, relativas a: *a*) la doble caracterización de los conceptos geométricos: formal y figural; *b*) la tridimensionalidad y sus representaciones, y *c*) la orientación y el posicionamiento.

3.1. Dificultades debidas a la identificación de los conceptos geométricos con sus representaciones

Todo concepto es distinto de sus representaciones; sin embargo, a lo largo de su aprendizaje, el escolar corre el riesgo de identificar y confundir algunos conceptos básicos con sus representaciones usuales.

La presentación de conceptos geométricos, generales y abstractos, tiene que hacerse mediante objetos físicos, gráficos o notaciones concretas y particulares. Estas representaciones, en su conjunto, hacen presente el concepto, pero ninguna de ellas lo determina totalmente. Entre todas muestran diferentes facetas y propiedades, pero cada una no las agota en su totalidad. Esto no suele ser percibido por los escolares y, a menudo, pasa inadvertido también para el docente cuando aquéllos identifican imagen con concepto, lo cual suele ser una fuente de errores. De este modo, es necesario tomar conciencia de la importancia de las imágenes y los elementos gráficos en el aprendizaje de la geometría —ello supone una ventaja, porque la hace más intuitiva que otros contenidos de la matemática escolar—, pero, a su vez, constituye un obstáculo importante si no se realiza adecuadamente. Por ello es preciso considerar el trabajo que hay que realizar a partir de las imágenes para llegar a su conceptualización abstracta. A continuación ofrecemos algunas indicaciones.

En la enseñanza tradicional, los conceptos geométricos son introducidos mediante unas nociones básicas (definición del concepto) y algunas figuras que constituyen ejemplos prototípicos y que le sirven de apoyo. Ello puede provocar una comprensión parcial de los escolares de esos conceptos, asociada exclusivamente a las figuras que han visto con mayor frecuencia como ejemplos y a las experiencias limitadas que han tenido de su uso (imagen del concepto). Por ejemplo, hay escolares que, ante las representaciones geométricas que presentamos en la figura 12.1 sobre el paralelismo, presentan las dificultades que se mencionan.

Para paliar este problema, se aconseja introducir los conceptos geométricos completando las imágenes prototípicas mediante una buena selección de ejemplos y contraejemplos, siguiendo un proceso que ejemplificamos a través del concepto de polígono.

a) En primer lugar, se identifican los atributos relevantes del concepto, es decir, las propiedades que tiene que cumplir. Para ello, se puede hacer uso de la definición. Así, consideraremos la definición de *polígono* como «una figura del plano delimitada por una línea poligonal cerrada y simple».

Para cada atributo relevante, es decir, los que aparecen en la definición, se deben proporcionar contraejemplos que lo incumplan. Para buscar buenos contraejemplos hemos de fijarnos en aquellas figuras que no sean polígonos, pero pudieran parecerlo o, al menos, prestarse a confusión. A continuación presentamos contraejemplos.

© Ediciones Pirámide

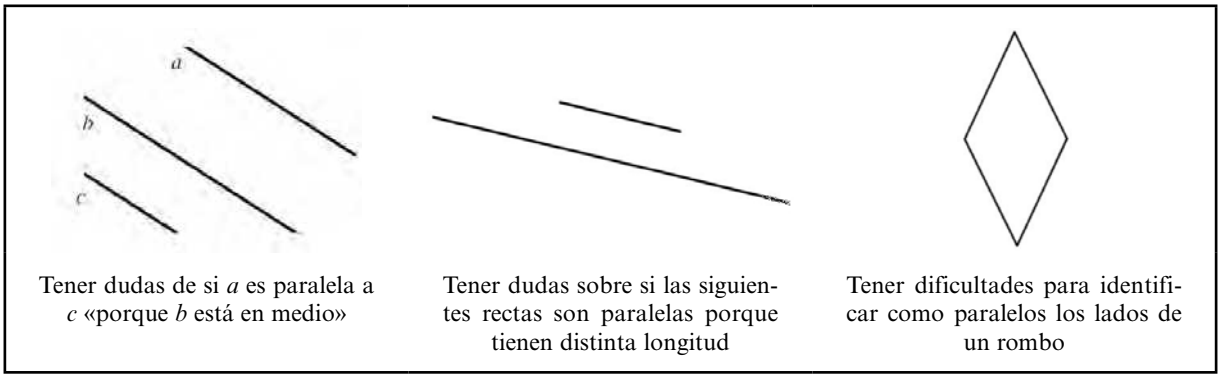


Figura 12.1.—Dificultades con el paralelismo.

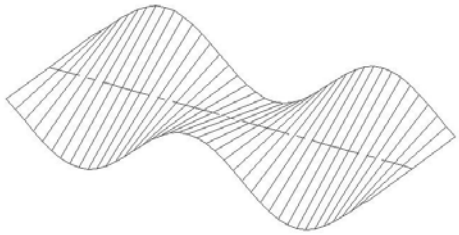
- *Es una figura del plano.* En la figura 12.2 presentamos algunos contraejemplos.
- *Delimitada por una línea poligonal*. En la figura 12.3 presentamos algunos contraejemplos.
- *Cerrada y simple.* En la figura 12.4 presentamos dos contraejemplos.

b) A continuación, identificamos los atributos irrelevantes que se presentan con frecuencia y pueden confundir a los escolares. En el caso de un polígono, éste puede ser regular o irregular, cóncavo o convexo, aparecer aislado o en contexto, puede tener cualquier número de lados o unos lados con longitudes inusuales, aparecer en orientaciones no habituales, etc. En la figura 12.5 presentamos un ejemplo de polígonos en un contexto, donde los niños deberían ser capaces de identificarlos. En este sentido, es importante que el docente busque ejemplos en los que atributos irrelevantes se presenten en formas variadas.

c) A partir de una buena selección de ejemplos y contraejemplos se deben generar discusiones en el aula, encaminadas a caracterizar el objeto geométrico en cuestión. La construcción de un concepto constituye una combinación de procesos visuales y analíticos que debe ser organizada mediante una serie de tareas de complejidad creciente. Estas tareas, diseñadas y/o gestionadas por el docente, centrarán su demanda en el uso avanzado de un vocabulario correcto por los escolares, desarrollado a partir del que emplean éstos para pensar y comunicar sus ideas. Se puede ir ampliando y volviendo sobre imágenes de polígonos en distintos momentos, singularmente cuando están implicados en el estudio de otros conceptos o en la resolución de problemas. Enfatizamos la necesidad de llamar la atención de los escolares hacia características relevantes o irrelevantes de los conceptos, a través de preguntas y explicaciones.

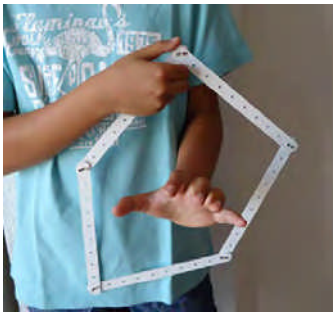
ACTIVIDAD 1: Introduce, siguiendo estas recomendaciones, el concepto de prisma. Para ello, determina propiedades relevantes y atributos irrelevantes, presenta ejemplos y contraejemplos variados y adecuados y, por último, formula preguntas encaminadas a fomentar el discurso en el aula para clarificar la caracterización del concepto.

© Ediciones Pirámide



Una hoja de papel podría ser la imagen de un rectángulo, pero si la ondulo no estará en un plano y no será un polígono.

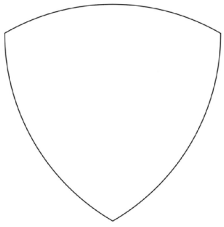
La figura debe ser plana, no ondulada, como en el caso de la cara de este supuesto poliedro.



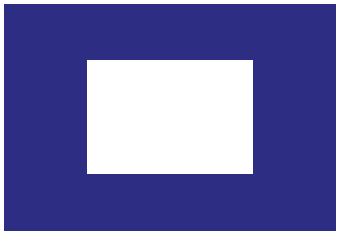
El polígono incluye la superficie plana y el borde, no sólo este último.

Esta imagen no es de un triángulo, sino que se trata de una figura tridimensional imposible.

Figura 12.2.—Contraejemplos de polígonos como figuras del plano.



Esta figura no es un triángulo, porque sus lados son curvos.

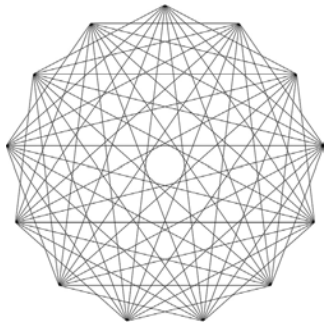


Esta figura está delimitada por dos líneas poligonales.

Figura 12.3.—Contraejemplos de que un polígono está delimitado por una línea poligonal.

© Ediciones Pirámide

La figura no está cerrada.



Los segmentos de la línea poligonal se cortan.

Figura 12.4.—Contraejemplos de que un polígono está delimitado por una línea poligonal cerrada y simple.

Figura 12.5.—Ejemplo de polígonos en contexto.

3.2. Dificultades relativas a la tridimensionalidad

Para la introducción de las formas tridimensionales, los escolares necesitan manejar representaciones físicas de ellas. A partir del trabajo con estas representaciones se posibilita la detección de relaciones y propiedades que, más adelante, podrán ser determinadas sin necesidad de disponer de modelos físicos. Éstos pueden ser de distinto tipo: modelos macizos, modelos huecos y armazones. Cuando se muestran los armazones de las figuras tridimensionales (hechos con palillos y plastilina, por ejemplo), resulta más difícil para los escolares identificar a qué familia corresponde la figura que si se muestra un modelo del mismo macizo (de madera, por ejemplo) o hueco (con cartulina a partir de un desarrollo plano). Así pues, conviene empezar por estos últimos, e ir integrando representaciones diferentes, aprovechando las ventajas que cada una de ellas ofrece sobre las demás, según el tipo de propiedades que resaltan o de acciones que permiten realizar en torno al concepto estudiado.

Los escolares tienen que considerar los modelos físicos dentro de una interpretación geométrica, pero cuando no se tienen suficientes conocimientos teóricos de geometría, los modelos de las figuras tridimensionales o de sus elementos se interpretan a partir de una lectura perceptiva, dando lugar a errores. Por ejemplo, se pueden construir polígonos utilizando pajitas de refresco (véase figura 12.6), de forma que, a partir de ellos, se pueden construir poliedros. Así, la arista del cubo en el modelo de la figura 12.7 está formada por dos pajitas, aunque algunos escolares identifican cada pajita con una arista.

© Ediciones Pirámide

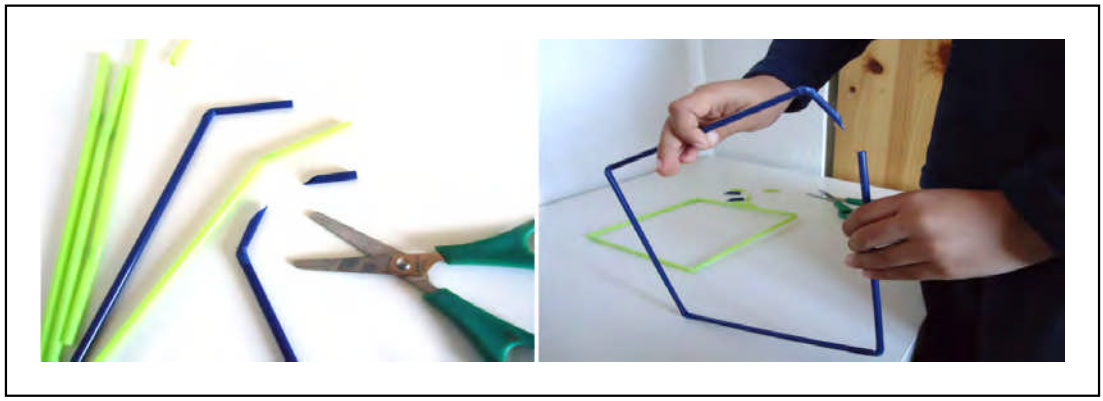


Figura 12.6.—Pajitas de refresco para formar polígonos.

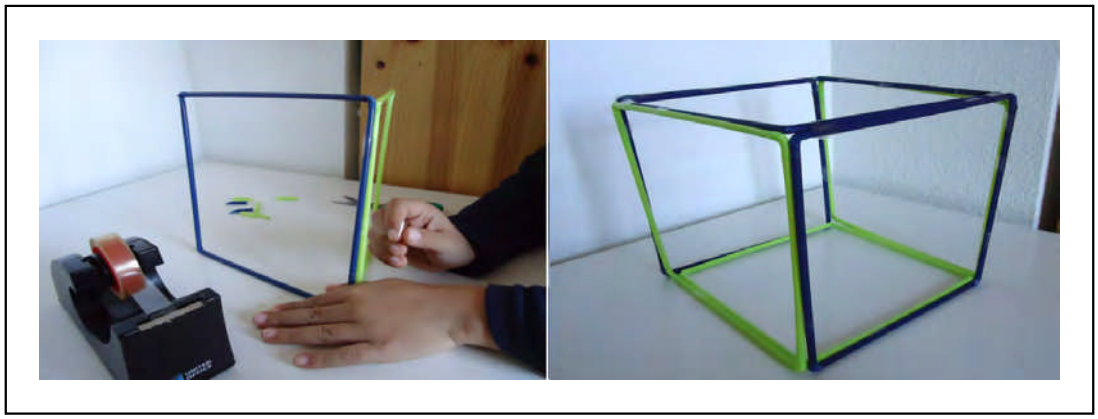


Figura 12.7.—Pajitas de refresco y cinta adhesiva para formar poliedros.

Otro tipo de dificultades asociadas a la tridimensionalidad viene generado por el uso de representaciones bidimensionales de los objetos y del espacio tridimensional. A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, las representaciones bidimensionales se imponen a través de las imágenes impresas, la televisión o las que proporcionan distintas tecnologías de la información y la comunicación. Puesto que cualquier representación plana de objetos tridimensionales ha de comportar siempre una distorsión de algunas propiedades del objeto o del espacio, se hace necesario aprender a interpretar las imágenes y a construir objetos tridimensionales, los cuales no pueden verse desde más de un punto de vista a la vez. Dicho aprendizaje constituye un proceso largo y no exento de obstáculos. Por ejemplo, hay escolares que no perciben determinadas aristas como perpendiculares en el dibujo (véase aristas *a* y *b* del cubo de la figura 12.8), cuando sabemos que la perspectiva de esta representación incluye el convenio de que lo sean.

© Ediciones Pirámide

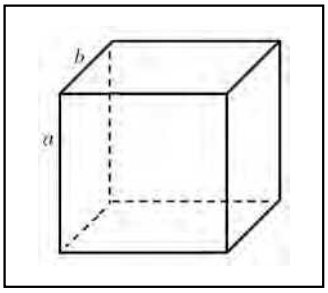


Figura 12.8.—Representación bidimensional del cubo.

Los escolares también suelen encontrar dificultades para distinguir entre la visión que tienen de un objeto y de su desarrollo plano. En la figura 12.9 mostramos desarrollos planos de poliedros, dibujados por niños tras la observación de un poliedro.

A medida que avanzan en su aprendizaje, los escolares serán más capaces de coordinar y representar distintos puntos de vista y de realizar desarrollos planos de figuras tridimensio-

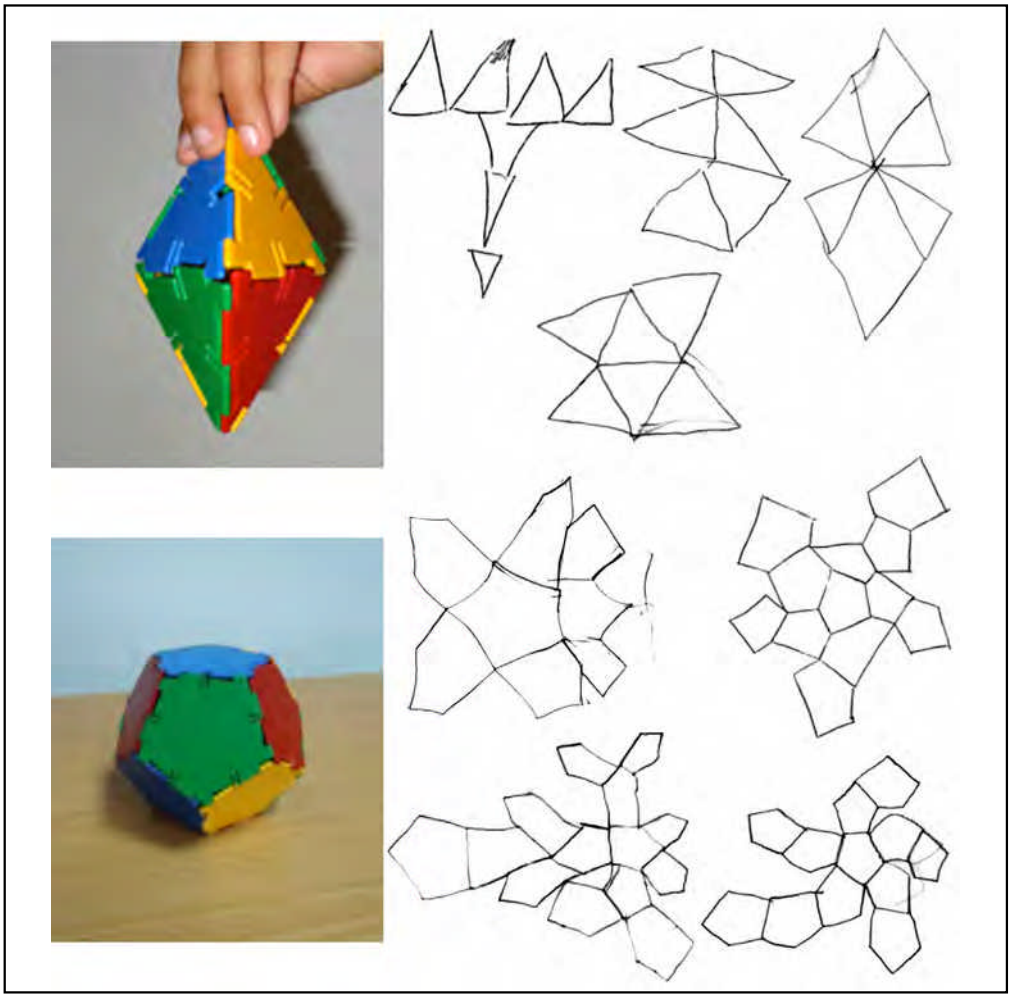


Figura 12.9.—Poliedros con el polidrón y desarrollos planos hechos por alumnos de primaria de diferentes edades.

© Ediciones Pirámide

nales cada vez más complejas. Para facilitarlo, es importante utilizar distintas representaciones de objetos y conceptos geométricos, explicitando las relaciones entre ellas.

ACTIVIDAD 2: Para cada uno de los desarrollos planos presentados en la figura 12.9: *a*) describe si el desarrollo plano es correcto o no, y *b*) en caso de no serlo, describe cuál es el error en el que incurren los estudiantes al hacer esas representaciones. Por último, presenta estrategias para ayudar a los estudiantes a mejorar su representación.

El proceso opuesto, de construcción de una forma tridimensional dada una representación bidimensional de ésta, tampoco es inmediato. Un caso particular es la representación de un edificio o de una construcción de bloques a través de su planta, alzado y perfil. Para facilitar este proceso es conveniente, en primer lugar, establecer relaciones entre una construcción y sus vistas ya dadas. A continuación, los niños pasarán a dibujar las vistas de construcciones dadas y a realizar construcciones a partir del conjunto de sus vistas. Posteriormente, realizarán construcciones y representarán el conjunto de sus vistas. Un ejemplo de esto lo encontramos en la figura 12.10. Es aconsejable evaluar la precisión de las representaciones, por ejemplo a partir de la reconstrucción de las construcciones de partida por parte de otros compañeros y del intercambio oral para corregir errores de dibujo y/o de interpretación. La confusión en la orientación izquierda-derecha es fuente de errores frecuentes en este tipo de actividad.

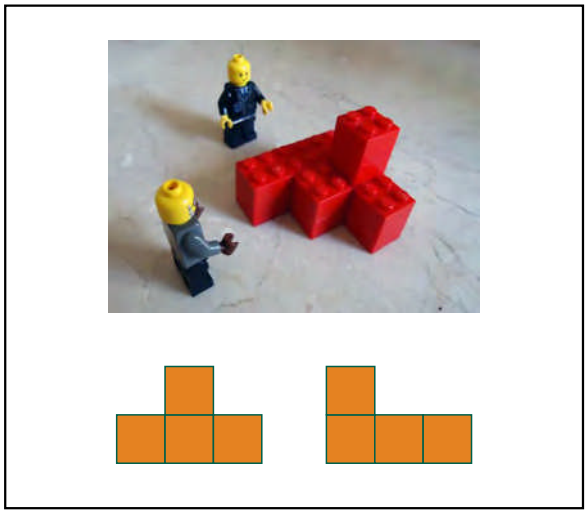


Figura 12.10.—Representación de una construcción, su alzado y su perfil.

3.3. Dificultades relacionadas con la orientación y posicionamiento

Tal como hemos visto, el currículo de Primaria contempla contenidos relativos a la ubicación en el espacio de seres y objetos en función de uno mismo y en relación con otros objetos. A menudo, las actividades que presentan los libros de texto encaminadas a lograr estos objetivos corresponden a situaciones en las que se espera que se produzcan o se afiancen aprendizajes de modo similar a como se hace en un contexto extraescolar. Es decir, intercambiando información sobre localizaciones y relaciones espaciales, en términos de arriba-debajo, delante-detrás, derecha-izquierda, cerca de, junto a, etc. La manera de orientar un objeto en el espacio puede provocar dificultades, que se derivan de las diferentes formas en que esto puede llevarse a cabo. En determinados objetos, se puede hacer atendiendo a puntos de referencia propios del objeto. Por ejemplo, un vehículo posee un delante (la parte delantera) y un detrás (el maletero), así como una derecha o una izquierda, determinadas por su movimiento. En otras situaciones, la orientación del espacio que rodea un objeto situado frente al observador se hace proyectando sobre él el propio esquema

© Ediciones Pirámide

corporal. Por ejemplo, describir la posición de los niños en los dibujos de la figura 12.11.

Esta proyección se puede hacer por rotación del propio esquema corporal, por simetría o por traslación (menos frecuente). En el dibujo del tobogán de la figura 12.11 se presta más a hacer una proyección por rotación, mientras que el caso del balancín es más probable que se haga por simetría. Hacemos una representación de los movimientos en la figura 12.12.

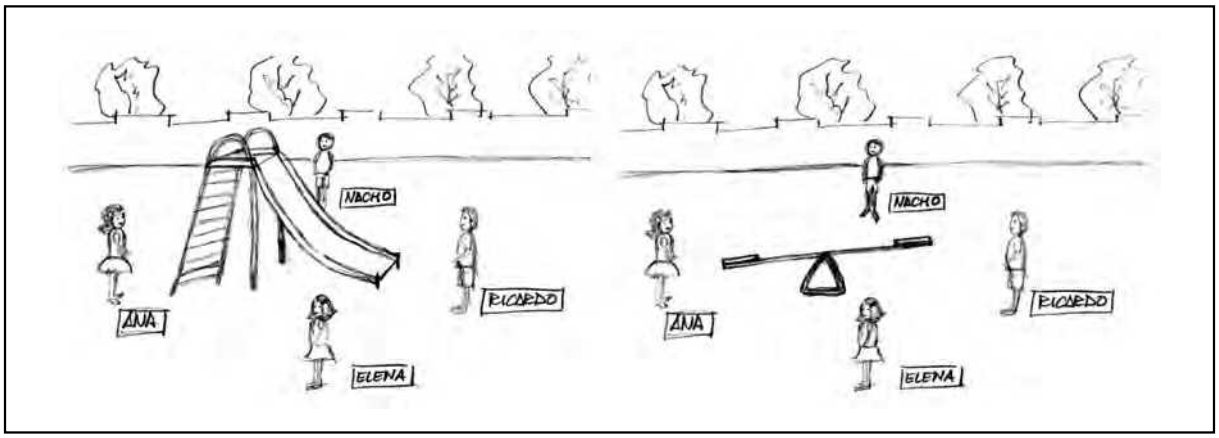


Figura 12.11.—Posición de niños relativa a tobogán y a balancín.

TRASLACIÓN	ROTACIÓN	SIMETRÍA
Delante	Izquierda	Detrás
Izquierda Derecha	Detrás Delante	Izquieda Derecha
Detrás	Derecha	Delante
Sujeto (mirando hacia la situación)	**Sujeto** (mirando hacia la situación)	**Sujeto** (mirando hacia la situación)

Figura 12.12.—Movimientos del sujeto para ubicarse.

Además de estas formas básicas, pueden encontrarse formas mixtas. Que el vocabulario correspondiente a las posiciones relativas y a los desplazamientos en el espacio se aprenda tempranamente en situaciones extraescolares puede enmascarar esta diversidad de esquemas desde los cuales el alumnado responde a las situaciones planteadas en clase. De nuevo, es res-

© Ediciones Pirámide

ponsabilidad del docente tener en cuenta esta fuente de dificultades y confrontar a los alumnos con situaciones que saquen a la luz las ambigüedades del lenguaje, para que puedan resolverse mediante procesos de comunicación bien dirigidos.

4. MATERIALES, RECURSOS Y TAREAS PARA EL TRABAJO DE LA GEOMETRÍA

Dado que existe un gran número de materiales para el trabajo de la geometría, es importante disponer de criterios para su utilización en el aula, teniendo en cuenta los contenidos que se vayan a trabajar, los objetivos previstos, la disponibilidad o las características de los escolares, entre otros. El empleo adecuado de los materiales requiere plantear actividades a través de las cuales el pensamiento se ponga en acción, así como situaciones en las que sea posible contrastar ideas, conjeturas, resultados o procedimientos. Es por ello que, a la par que los materiales y recursos, introduciremos tareas que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, así como a ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los escolares.

A continuación presentamos algunos materiales organizados según los focos de contenido considerados, sin perder de vista que un mismo material puede ser útil para más de un foco. Para algunos de ellos, abordamos las siguientes cuestiones.

- Presentación del material.
- Tipo de contenido que se puede abordar, según los diferentes focos identificados.
- Distinción sobre si es comercial o no y si es posible su elaboración.
- Actividades concretas o referencias donde se puede observar su utilización.

4.1. La situación en el plano y en el espacio

Planos, mapas y maquetas

Los planos, los mapas y las maquetas son representaciones gráficas y esquemáticas de una región física o una porción de territorio, de los objetos y de sus relaciones, mediante determinados convenios y a una escala diferente. En el caso de las maquetas, la representación es tridimensional, mientras que para los mapas y los planos se realiza una transformación de la realidad tridimensional a la representación en dos dimensiones.

Ejemplo de tarea para los escolares

A partir de varias fotografías de una zona de tu barrio o ciudad, desde diferentes perspectivas, monta una maqueta rudimentaria con materiales sencillos de uso común: cajas de distinto tipo, tapones y tapaderas, palillos, pajitas, etc. Lo importante no deben ser los detalles de cada uno de los objetos (por ejemplo, si representas un edificio, no es necesario representar las ventanas y las puertas) ni es necesario que seas riguroso con la escala. Los elementos que se pueden considerar son: la forma y distribución de los distintos volúmenes, la dirección y anchura de las calles, los tamaños relativos de los elementos representados y las posiciones.

Marca tres puntos diferentes de la maqueta, A, B y C. Da las indicaciones que creas oportunas para llegar desde A hasta C. Haz lo mismo desde B.

ACTIVIDAD 1: Identifica qué contenidos y qué objetivos se pueden trabajar con la anterior tarea.

ACTIVIDAD 2: Utilizando el plano de tu ciudad, plantea una tarea en la que se pretenda lograr algunos de los objetivos señalados para el

© Ediciones Pirámide

foco de contenido «la situación en el plano y en el espacio». Mirando los documentos curriculares en vigor para Educación Primaria, indica el nivel en que se trabaja y las competencias a las que esta actividad contribuye. Justifica tu respuesta.

Fotografías e imágenes

Las fotografías e imágenes se pueden emplear para describir situaciones y posiciones relativas entre sus elementos. Además, pueden usarse para percibir y analizar representaciones planas de objetos tridimensionales. Por otra parte, las imágenes de obras de arte y arquitectura permiten apreciar el papel de la geometría en la creación de obras bellas o interesantes desde el punto de vista estético.

Ejemplo de tarea para los escolares

A partir de fotografías de edificios, lugares conocidos por los escolares, figuras imposibles, etcétera, plantear preguntas que estimulen la observación y el análisis de cada una de las imágenes. Por ejemplo: *a*) ¿desde dónde está hecha la fotografía?; *b*) ¿qué verías si estuviera hecha desde el lado opuesto?; *c*) ¿podría ser de otras maneras?; *d*) ¿qué verías si mirases desde arriba?; *e*) ¿puede existir en la realidad una figura así?; *f*) ¿por qué resulta atractiva la imagen?, y *g*) ¿qué elementos geométricos identificas en ella?

4.2. Formas planas y espaciales

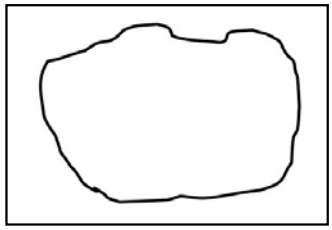
Aunque el objetivo de muchos aficionados a la papiroflexia es diseñar nuevas y más complicadas figuras mediante papel, aquí consideramos el papel como un recurso para el trabajo de la geometría. El papel permite la manipulación de objetos geométricos y un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio. Es importante destacar que los procesos de construcción implicados son lógicos. Mediante el papel se pueden construir elementos tan básicos como el punto, entendido como región del espacio donde dos rectas (representadas mediante dobleces en el papel) no paralelas se cortan, comprobar propiedades como la perpendicularidad, así como construir formas planas o espaciales.

Ejemplo de tarea para los escolares

Cada escolar debe coger un trozo de papel cuya superficie esté delimitada por una línea curva. Únicamente doblando el papel, se les propone que construyan un cuadrado y expliquen cómo lo han hecho.

La actividad que se les propone es:

«Construye un cuadrado, mediante el doblado de un papel, con una forma similar a la que aparece en la siguiente figura.



Cuando lo hayas hecho: *a*) verifica que es cuadrado, y *b*) explica los pasos que has seguido para su construcción.»

Una vez terminada esta parte de la tarea, cada escolar se reunirá con un compañero y discutirá sobre la validez del trabajo que ha realizado cada uno.

En esta actividad se están trabajando los elementos de un cuadrado (lado, vértice o ángulo) y otros como el paralelismo, la perpendicularidad, los ángulos, las diagonales o la simetría. Además, podrán poner de manifiesto las

© Ediciones Pirámide

caracterizaciones del cuadrado, bien según igualdad de ángulos y lados, o bien según sus diagonales.

Esta tarea ofrece la oportunidad de investigar los procedimientos necesarios para lograr construir un cuadrado con material manipulativo, describir el proceso de su construcción y comprobar sus características.

Los escolares pueden abordar la actividad con las orientaciones presentadas en el capítulo 11 del libro (Segovia y Rico, 2011). Necesitan conocer cómo construir rectas perpendiculares sobre el papel y algunas características sobre el paralelismo y perpendicularidad.

Con esta actividad estamos abordando los siguientes objetivos:

- Reconocer y describir las características de las figuras planas utilizando el vocabulario geométrico básico.
- Utilizar papel para representar, construir y explorar formas geométricas planas y espaciales.
- Resolver problemas de formas planas y espaciales.

El papel también es muy útil para relacionar la geometría plana y la espacial, a través de los desarrollos planos. Éstos permiten, entre otras cosas: *a*) identificar los desarrollos planos válidos de un sólido de entre algunos dados, y *b*) dibujar diferentes desarrollos planos que sean válidos para un determinado sólido. Existen recortables con los desarrollos planos de poliedros, pero también es un material que puede ser construido por el profesor con cartulina, al igual que los troquelados, que presentamos más adelante. Del papel destacamos, frente a otros materiales, que es conocido por todos, asequible y de bajo coste.

Aunque mencionamos el papel como recurso especialmente interesante para las formas planas y espaciales, también puede emplearse para las regularidades e isometrías (véase figura 12.13). A través del doblado podemos reproducir isometrías. Si, además, introducimos la posibilidad de realizar cortes, la variedad de tareas que se pueden plantear es aún mayor.

Figura 12.13.—Isometrías en el papel.

ACTIVIDAD 3: Describe cómo debes doblar y el tipo de corte que debes realizar sobre un folio para que, al desdoblarlo, observes un rombo. Identifica los contenidos y los objetivos que permiten abordar esta actividad.

Puzles

Los puzles son una herramienta interesante y apropiada para trabajar sobre la situación en el plano y en el espacio desde los primeros cursos del sistema educativo.

El tangram es un tipo de puzle usado con frecuencia en las aulas. El tangram más común, y al que haremos referencia en este capítulo, es el tangram chino (véase figura 12.14), que tiene su origen en el país que le da nombre. Está compuesto por siete figuras geométricas planas (triángulos y

© Ediciones Pirámide

cuadriláteros de diferentes tipos). Aunque este recurso está disponible en el mercado construido con piezas de madera, plástico, espuma o porespán, el material más económico y accesible es el papel. Teniendo en cuenta las características geométricas de las figuras, se pueden construir las diferentes piezas con distintos materiales, según los recursos del centro educativo.

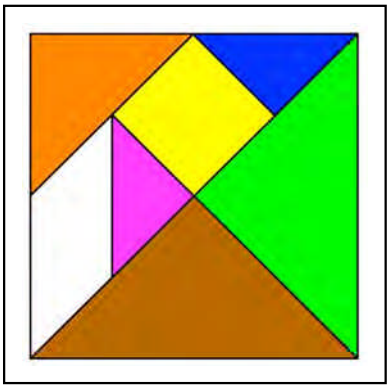


Figura 12.14.—Tangram chino.

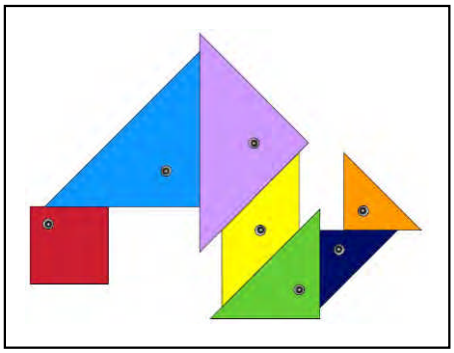
Ejemplo de tarea para los escolares

Después de que los escolares se hayan familiarizado con el tangram, planteamos una actividad a la totalidad del grupo. Trabajando individualmente, cada uno con un tangram, deben construir el polígono con el mayor número de lados que puedan.

Los escolares deben anotar en una tabla el número de lados que tiene su polígono y el tipo de polígono que es (regular/irregular, convexo/cóncavo), en una tabla como la siguiente, que construirá la maestra en la pizarra:

Nombre del niño	Número de lados	¿Regular o irregular?	¿Cóncavo o convexo?

Ganará quien que consiga el polígono con el mayor número de lados. A continuación mostramos un ejemplo de un polígono que presentó un alumno ante esta actividad.



Esta actividad pretende que los escolares no se limiten al trabajo con polígonos regulares ni convexos, con los que están más familiarizados. Si no se percataran de esta situación, puede ser útil mencionarles que es posible conseguir un polígono de más de 20 lados. Esto les puede llevar a probar con formas diferentes a las que tengan en mente.

Esta tarea les permite manipular formas poligonales (piezas del tangram), describir el polígono que han construido ellos atendiendo a su regularidad y a su convexidad, comparar las características del polígono que han construido ellos con los de sus compañeros e inducir el tipo de polígonos que pueden construir para conseguir el mayor número de lados.

Por otra parte, el tangram es un material especialmente apropiado para trabajar algunos de los contenidos geométricos mencionados anteriormente, como la semejanza de figuras, igualdad de lados, simetría, teoremas de Pitágoras y de Thales y razón de semejanza, entre otros. Se pueden proponer tareas de reconocimiento, construcción y manipulación de figuras geomé-

© Ediciones Pirámide

tricas planas. Al igual que otros puzles, éste favorece el desarrollo del sentido espacial, el interés por la resolución de problemas, estrategias de composición y descomposición geométricas, la imaginación y la creatividad.

ACTIVIDAD 4: Busca una actividad para los escolares de Educación Primaria, diferente de la anterior, donde se utilice el tangram. Identifica para qué curso es adecuada y relaciónala con los objetivos que se proponen mediante ella.

Plastilina e hilo

Percibir y describir las secciones planas que se producen en una forma espacial no es tarea fácil. Realizar físicamente la sección sobre una representación tridimensional en plastilina puede ser útil (figura 12.15).

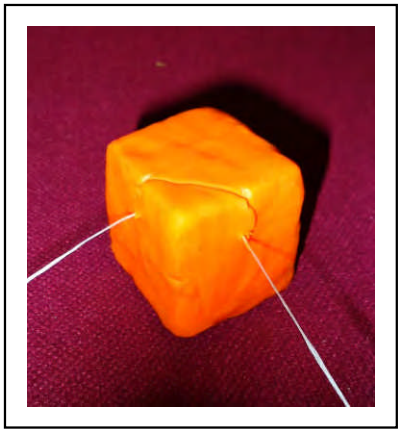


Figura 12.15.—Hilo cortando una sección plana de un cubo de plastilina.

ACTIVIDAD 5:

a) Comprueba que al realizar una sección plana de un cubo que pasa por los puntos medios de tres aristas obtienes un triángulo equilátero. Justifica esta situación utilizando las propiedades del cubo y del triángulo equilátero.
b) Traza otros cortes sobre el cubo, de forma que generes secciones planas con otras formas poligonales. Describe cómo has realizado cada uno de los cortes a través de sus características geométricas y qué polígonos obtienes como resultado de las secciones planas.
c) Presenta otros materiales que pudieras utilizar para realizar esta tarea.

Polidrón y troquelados (polígonos engarzables)

Existen diversidad de materiales para construir poliedros. El polidrón y los troquelados (véase figura 12.16) son dos de ellos.

Figura 12.16.—Poliedros con troquelados.

ACTIVIDAD 6: Busca al menos tres recursos didácticos, diferentes del polidrón y los troquelados, que se puedan emplear en el aula de Educación Primaria para construir poliedros.

Con los troquelados, se ha de tener en cuenta que la falta de rigidez de la cartulina permite realizar poliedros «imposibles», forzando uniones de ángulos que serían planos o de más

© Ediciones Pirámide

de 360° y doblando ligeramente las caras. Este hecho se puede utilizar como fuente de discusión sobre la necesidad de que las caras de un poliedro sean polígonos y, por tanto, sean figuras planas (tal como vimos en los contraejemplos de polígono en el apartado 3).

ACTIVIDAD 7: Identifica ventajas e inconvenientes del polidrón, los troquelados y los tres recursos que hayas localizado en la actividad anterior. Describe dos tipos de errores para los que pueda resultar interesante utilizar estos materiales y propón tres ejemplos.

Estructuras de aristas

Para la construcción de polígonos y poliedros mediante estructuras de aristas o armazones existen materiales comerciales. Pero también se pueden utilizar recursos caseros como palillos de dientes o varillas de madera unidos por plastilina o gominolas; alambres, cuerdas, pajitas de refrescos y limpiapipas, etc.

ACTIVIDAD 8: Realiza un análisis comparativo de las diferentes propiedades que se pueden explorar con los materiales presentados en este apartado para la representación de poliedros (modelos macizos, papel, engarzables y estructura de aristas). Este análisis debe contener la descripción de las propiedades de los poliedros que pueden percibirse mejor con cada uno de ellos.

Policubos

Los policubos son cubos macizos congruentes (véase figura 12.17), que se pueden unir entre sí encajando dos de sus caras.

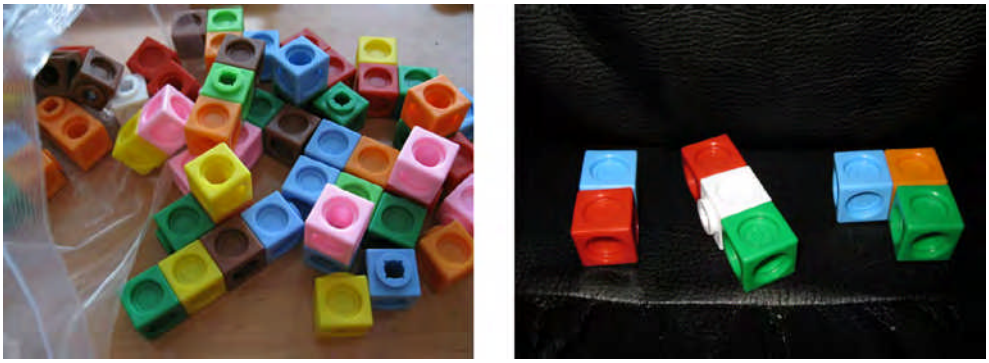
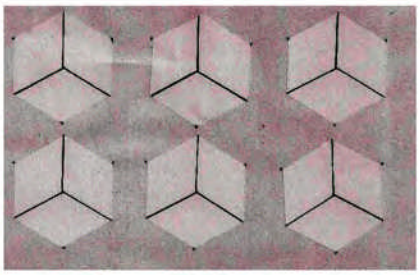


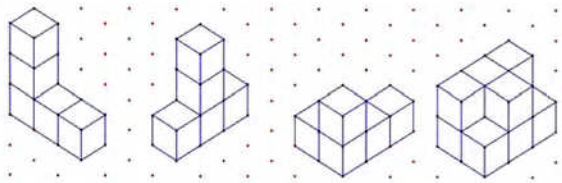
Figura 12.17.—Policubos.

La representación de las agrupaciones de cubos sobre el papel suele generar dificultades. El papel isométrico puede ayudar a superar algunas de estas dificultades, ya que permite representar en el plano las proyecciones isométricas de agrupaciones de cubos. Utilizar cubitos recortables (véase imagen de la izquierda de la figura 12.18) y pegarlos en la trama isométrica puede ser un paso intermedio que ayude a los escolares a entender y realizar, posteriormente, la representación plana (véase imagen derecha de la figura 12.18).

© Ediciones Pirámide



Cubitos para recortar y pegar en papel isométrico como paso intermedio entre la figura tridimensional y su representación plana.



Pentacubos representados en papel isométrico.

Figura 12.18.—Representaciones planas de los policubos.

Ejemplo de tarea para los escolares

En un pueblo muy lejano, vive una gente diminuta en casas con forma de cinco cubos conectados por las paredes. Un terremoto destruye las casas y los habitantes deciden reconstruir el pueblo de forma creativa. Para ello, quieren que cada casa de cinco cubos sea diferente de las demás. ¿Podéis ayudarles? ¿Cuántas casas distintas podríais diseñarles?

4.3. Regularidades e isometrías

Mosaicos

En los mosaicos, una serie de figuras planas se ajustan perfectamente a sus vecinas para cubrir completamente una superficie sin dejar huecos ni solaparse, formando diseños geométricos que pueden observarse en las artes decorativas, la naturaleza, la industria o el diseño gráfico publicitario. Con figuras planas hechas con plástico, cerámica, cartón o tela, los escolares pueden construir poliedros y formas espaciales flexibles, crear mosaicos y analizar sus regularidades y sus propiedades. La flexibilidad de determinados materiales hace que el profesor deba ser cuidadoso para evitar confusiones.

Ejemplo de tarea para los escolares

Presenta diversas imágenes de mosaicos. Proporciona a los escolares polifieltros (polígonos de fieltro con velcro en los bordes) para que hagan sus propias creaciones. Pueden emplearlas para hacer manteles, vestidos, bolsos e incluso sombreros imaginativos.

Geoplanos y tramas

El geoplano es un material manipulativo que consiste en un tablero con una serie de puntos fijos distribuidos regularmente sobre éste; los puntos se destacan con pivotes, clavos o resaltes, los cuales permiten la construcción de diferentes formas geométricas mediante la utilización de gomas ancladas en sus puntos fijos (véase figura 12.19). Esto permite estudiar los elementos de las formas geométricas y analizar ciertas características. Hay geoplanos cuadra-

© Ediciones Pirámide

dos, triangulares y circulares, en función de la posición de los puntos fijos dentro del tablero.

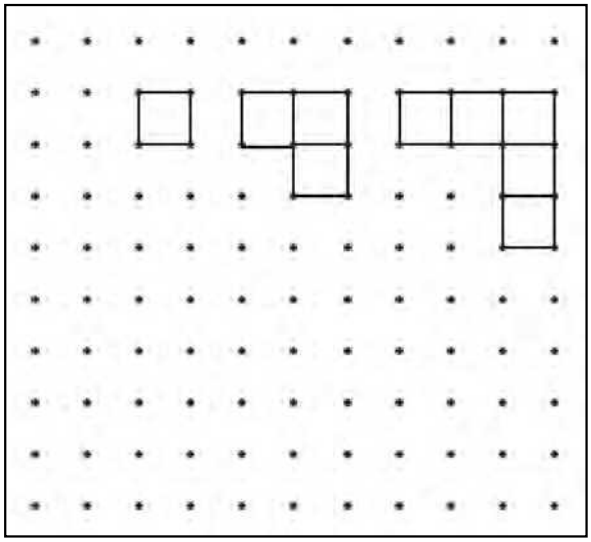


Figura 12.19.—Geoplano cuadrado.

Ejemplo de tarea para los escolares

En el geoplano cuadrado de la figura 12.19 presentamos diferentes formas geométricas construidas mediante cuadrados. Identifica el patrón que observas en ese geoplano. Representa cuáles serían las figuras que irían a continuación de las ya construidas, siguiendo el patrón que observas.

En los geoplanos cuadrado e isométrico se pueden construir diferentes polígonos en distintas posiciones, lo que permite ayudar a los escolares a no incurrir en algunos de los errores que mencionamos con anterioridad.

Los geoplanos son un material comercial, pero también se pueden hacer con madera y puntillas o una lámina de corcho y palillos. Para el caso del geoplano cuadrado, una hoja cuadriculada permite hacer un trabajo análogo.

ACTIVIDAD 9: Describe un geoplano isométrico y muestra una foto o dibujo del mismo. Razona para qué tipo de polígonos utilizarías el geoplano isométrico en lugar del cuadrado, y viceversa.

Espejos

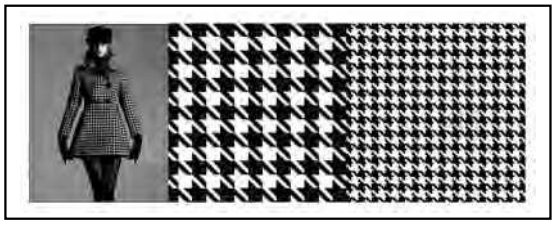
Un espejo puede servir para profundizar sobre la simetría. El estudio de las características invariantes entre una forma o figura y su simétrico en el espejo representa una actividad interesante. El espejo representa el eje de simetría si lo utilizamos para trabajar en el plano, y el plano de simetría si nos referimos al espacio.

La unión de dos espejos formando un libro abre el abanico de construcciones y, por tanto, de tareas. En la imagen de la derecha de la figura 12.20 se observa la construcción de un hexágono regular. Para ello, se ha situado el libro de espejos sobre dos de los lados de un triángulo equilátero.

A continuación presentamos una actividad que se puede realizar utilizando espejos.

Ejemplo de tarea para los escolares

Se llama «pata de gallo» a un dibujo bicolor de ciertos tejidos, caracterizado por la repetición de pequeñas figuras abstractas de cuatro puntas que se asemejan a los tres dedos y el espolón de la pata de un gallo.



a) Utilizando el libro de espejos, identifica una tesela de esta teselación, dibújala sobre

© Ediciones Pirámide

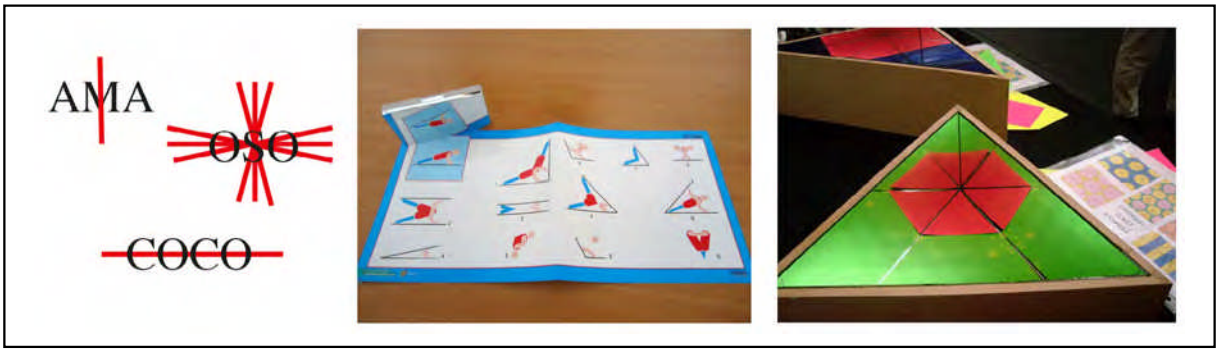


Figura 12.20.—Espejos.

papel cuadriculado y estudia qué tipo de polígono es, indicando su nombre.

b) Identifica una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.

c) Identifica una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la pata de gallo.

d) Dibuja con instrumentos de dibujo la teselación de la pata de gallo.

ACTIVIDAD 10:

a) Identifica objetivos que se pueden perseguir en el aula con esta actividad de diferentes focos de contenido tratados en este capítulo.

b) Justifica para qué curso de la Educación Primaria tendría sentido esta actividad.

Geogebra y otros programas de geometría dinámica

Los programas de geometría dinámica permiten dibujar, mover y modificar formas, encontrar propiedades y relaciones entre las formas, formular conjeturas y probarlas. Existen diferentes programas de este tipo, como Geogebra, Cabri-Géomètre, Cinderella, Geometer's Sketchpad o Geup. Todos tienen una base común, aunque presentan diferencias en cuanto al estilo de presentación en la pantalla y otras habilidades que están presentes en alguno o algunos de ellos y no en otros.

También existen numerosas páginas de internet que ofrecen recursos interactivos y applets para el trabajo de la geometría.

ACTIVIDAD 11:

a) Busca y describe tres programas con los que creas que es interesante trabajar la geometría en Educación Primaria.

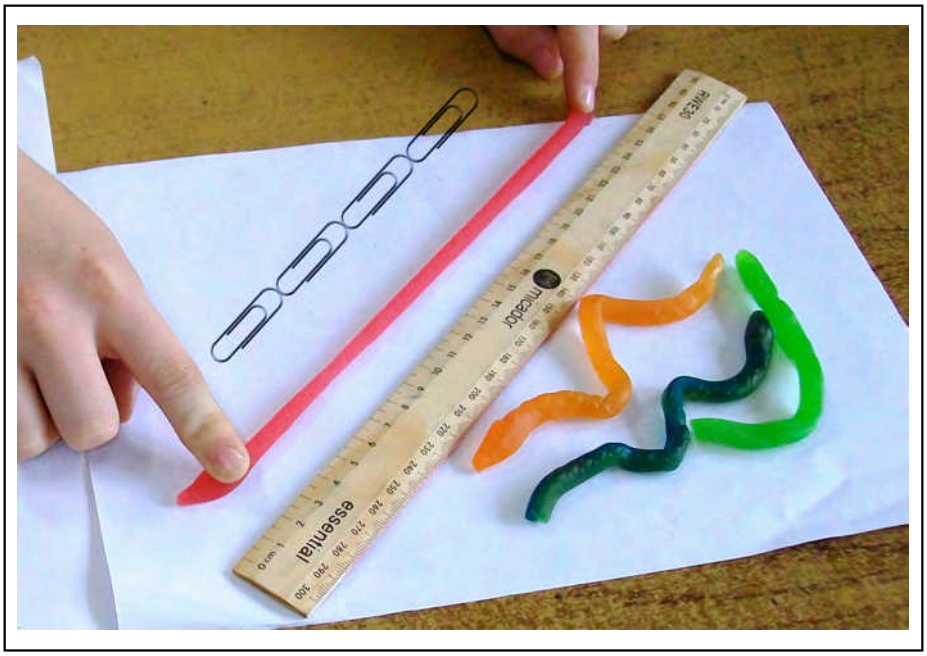
b) Selecciona uno de los tres programas anteriores. Plantea una actividad que te parezca adecuada para Educación Primaria y plantea qué contenidos y objetivos se podrían trabajar en la misma.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida

13

MARÍA JOSÉ GONZÁLEZ LÓPEZ



La medida está presente en todos los ámbitos de la vida cotidiana. Los escolares de Primaria han de aprender a expresar e interpretar las horas que dura un evento, la distancia que falta para llegar a un lugar, la superficie de bosque quemado, los barriles de petróleo vendidos, las toneladas de basura producidas, los millones de euros de la deuda o el ángulo de tiro con el que se marca un gol. Necesitan saber lo que significa medir el tiempo, la longitud, la capacidad, la superficie, el volumen, la masa, el valor monetario y la amplitud de ángulos. Éstas son las magnitudes que habitualmente se estudian en Primaria.

En el contexto educativo, los escolares aprenden las nociones métricas en conexión con otros contenidos matemáticos del currículo. Y es que a través de la medida se conectan de manera natural nociones de números y de geometría: por ejemplo, las fracciones y los decimales son útiles para expresar cantidades de superficie menores que la unidad. Numerosas propiedades geométricas se refieren a la medida, pues las propiedades de los polígonos suelen afectar a longitudes o superficies en el plano. Por otro lado, acciones matemáticas esenciales —como comparar, ordenar, clasificar, descomponer o completar— surgen de manera

© Ediciones Pirámide

natural cuando los escolares tienen que medir magnitudes. Así pues, aprender a medir magnitudes es uno de los pilares del aprendizaje de las matemáticas de la etapa Primaria.

Como veremos en este capítulo, la enseñanza y el aprendizaje de las magnitudes y su medida conciernen a una estructura conceptual técnicamente muy elaborada. Medir es mucho más que utilizar un conjunto de fórmulas y aplicarlas de manera rutinaria. Los escolares comienzan percibiendo las distintas magnitudes y van progresando a lo largo de una serie de fases hasta desarrollar estrategias para medir y estimar cantidades de esas magnitudes. En este capítulo, que complementa al capítulo 7 anterior, en el que se han presentado las componentes del sentido de la medida, profundizamos en las características del aprendizaje de las magnitudes y su medida, proponemos tareas y damos orientaciones para plantear su enseñanza. Nos centraremos en el caso de las magnitudes longitud, superficie y volumen, basadas en las dimensiones geométricas de los objetos, junto con una reflexión complementaria sobre la magnitud «capacidad».

© Ediciones Pirámide

1. FOCOS DE CONTENIDO DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA EN PRIMARIA

En el capítulo 14 del libro *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (Segovia y Rico, 2011) detallamos la estructura conceptual de las magnitudes y su medida en Primaria. Presentamos aquí algunas cuestiones relevantes desde el punto de vista de su enseñanza y su aprendizaje.

Para desarrollar el sentido de la medida, los escolares tienen que identificar los atributos que pueden ser medidos, es decir, tienen que percibir las magnitudes, tienen que conocer los tipos de unidades habituales para medir dichas magnitudes, y tienen que aprender estrategias para obtener su medida, incluidas las estrategias de estimación. Los focos de contenido que subyacen a este proceso son los siguientes:

- Las magnitudes en sí mismas son el foco de contenido básico. La idea de *magnitud* se desarrolla al identificar los atributos de los objetos que pueden ser comparados y medidos; por ejemplo, en una cuerda, los escolares identifican su longitud como un atributo que se puede comparar y medir. También es una longitud el espacio faltante entre dos lugares, es decir, la distancia que los separa.
- Tras identificar una magnitud, es posible agrupar todos los objetos que tienen la misma *cantidad de magnitud;* esta idea requiere un cierto grado de abstracción, ya que es una característica del conjunto de objetos que comparten esa magnitud en el mismo grado: todas las cuerdas que llegan a los mismos extremos cuando están estiradas tienen la misma cantidad de longitud, independientemente de su grosor, color, material u otras propiedades.
- El siguiente foco de contenido es el conjunto de procedimientos para *medir* y así obtener la *medida* de la magnitud. Este proceso requiere una referencia con la cual comparar la cantidad que se quiere medir, es decir, una *unidad de medida.* En Primaria se introducen las unidades estandarizadas del Sistema Métrico Decimal y del Sistema Internacional de Medidas, con sus múltiplos y submúltiplos, pero previamente los escolares trabajan con unidades no convencionales (palmos, pies, lapiceros, etc.). Para medir, se emplean procedimientos variados que dependen de la magnitud y de la unidad de medida consideradas. Estos procedimientos pueden clasificarse en tres grandes bloques:

© Ediciones Pirámide

— Procedimientos de medición directa: la actividad esencial que realizan los escolares es reiterar sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplos, hasta completar la cantidad de magnitud de que se disponga; por ejemplo, para medir una cuerda superponen sobre ella los centímetros de la cinta métrica.

— Procedimientos de medición indirecta: la actividad esencial que realizan los escolares es medir cantidades de otra magnitud y, con ellas, aplicar una fórmula; por ejemplo, para medir el área de un triángulo se miden las longitudes de su base y su altura, se multiplican, y se dividen entre dos.

— Procedimientos de estimación: los escolares obtienen la medida de forma aproximada a partir de juicios subjetivos sobre el tamaño de la cantidad. Estos procedimientos se pueden apoyar en procedimientos directos y/o indirectos en algunas fases del proceso de obtención de la medida; por ejemplo, para calcular la superficie de bosque quemado en una fotografía aérea, delimitan aproximadamente la zona mediante una retícula y cuentan los cuadrados afectados.

Actividad 1:

a) Consulta los documentos curriculares de Educación Primaria e identifica los cursos en los que se trabajan los contenidos correspondientes a cada uno de los focos.

b) Busca en los libros de texto de matemáticas de 3.º y 4.º de Educación Primaria de alguna editorial los temas correspondientes al bloque de magnitudes. Relaciona los contenidos que se tratan en esos temas con los que se indican en los documentos curriculares para esos cursos.

Las magnitudes que se estudian en Primaria son el tiempo, la longitud, la superficie, la capacidad y el inicio del volumen, el peso y la masa, el valor monetario y la amplitud de ángulos. No todas ellas se abordan con la misma profundidad. El tiempo se estudia al inicio de Primaria con medidas inferiores al día: horas, minutos y segundos, vinculadas al empleo del reloj y a la utilización del lenguaje básico de las fracciones (medios, cuartos, tres cuartos); posteriormente se manipula el sistema sexagesimal y las operaciones con horas, minutos y segundos. Más adelante se estudian unidades temporales mayores que el día: la semana, el mes, la estación y el año. El valor monetario se distingue de las demás magnitudes en que el proceso de asignación de una medida no tiene un procedimiento objetivo. Su estudio se centra en aprender a manejar las monedas y sus equivalencias. El sistema monetario es uno de los recursos más recurrentes para dar sentido al sistema de numeración decimal y a las operaciones aritméticas. El estudio de la amplitud angular suele reducirse al empleo de instrumentos convencionales de medida de ángulos en grados, momento en el que surge de nuevo la idea de periodicidad y aparece la necesidad de establecer un convenio de orientación para poder asignar una medida a un ángulo.

Las magnitudes básicas, longitud, capacidad y peso/masa, se estudian en todos los ciclos de Primaria. A la longitud, junto con las otras magnitudes geométricas, superficie y volumen, le daremos un tratamiento preferente. Las razones de esta opción son numerosas. Sus cantidades se ejemplifican y materializan fácilmente, de modo que se pueden manipular de forma concreta y tangible a través de objetos cotidianos; se relacionan con una amplia variedad de propiedades geométricas; a través de ellas se pueden hacer justificaciones típicas del razonamiento geométrico, y están asociadas a proce-

© Ediciones Pirámide

dimientos que resultan fundamentales en otros ámbitos de las matemáticas, como comparar, ordenar, clasificar, descomponer o completar. En el resto del capítulo nos centraremos en la longitud, la superficie y, secundariamente, el volumen. Si bien el estudio del volumen se culmina en Secundaria, abordaremos algunas diferencias entre el volumen y la capacidad, para lo cual haremos también referencia a esa magnitud.

2. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA EN PRIMARIA

Los objetivos de aprendizaje que se aplican a cada magnitud son los siguientes:

a) Percibir la magnitud y sus propiedades.
b) Conocer, utilizar, transformar y hacer operaciones con unidades de medida.
c) Conocer y utilizar procedimientos de medida.
d) Resolver problemas sobre medida de cantidades en contexto.

Seguidamente, concretamos estos objetivos sobre la longitud, la superficie y el volumen. Los presentamos de forma secuencial, aunque no diferenciada por cursos, ya que se desarrollan de forma interrelacionada en todos los cursos.

2.1. Objetivos de aprendizaje de la longitud

a) Todos los cuerpos tienen dimensiones, algunas de las cuales destacan. Los escolares han de desarrollar una percepción sensible inicial sobre lo que es la longitud a partir de las dimensiones predominantes de objetos concretos (una cuerda, un lápiz, una regla y otros muchos). Han de aprender a comparar y ordenar objetos según su longitud. La percepción sensible inicial ha de ir evolucionando progresivamente hasta incorporar propiedades como la conservación, la composición aditiva y la transitividad de la longitud, propiedades que describimos en la sección siguiente.

b) Las unidades de medida de longitud que los escolares han de conocer son:

- Las unidades no convencionales, como el palmo, el pie, el paso, la braza, etc.
- Las unidades estandarizadas del sistema métrico decimal, es decir, el metro (m), sus múltiplos y submúltiplos.
- Otros sistemas, como la pulgada o la milla.

Han de aprender a transformar unas unidades en otras y a expresar la medida de una cantidad de diferentes formas.

c) Los escolares han de conocer y utilizar instrumentos de medida de longitud, como la regla graduada, la cinta métrica, el odómetro o el cuenta-kilómetros. Y han de aprender a obtener la longitud de un objeto o la distancia entre dos objetos:

- Mediante el uso de la regla graduada o la cinta métrica aprenden procedimientos de medida directa.
- Aprenden procedimientos de medida indirecta de la longitud, como descomponer un objeto en trozos y sumar sus longitudes.
- Desde el punto de vista de la estimación, aprenden procedimientos como medir varias veces y hacer el promedio.

© Ediciones Pirámide

d) Los escolares han de saber aplicar sus conocimientos en situaciones en las que han de medir la longitud de objetos cotidianos —el contorno de una mesa, el largo y el ancho de la clase, el contorno del campo de fútbol, etc.— y han de calcular y estimar alturas y distancias, eligiendo la unidad adecuada a cada situación.

ACTIVIDAD 1:

a) Identifica en libros de texto de Primaria tareas del tipo siguiente:

- Tareas en las que los escolares tengan que clasificar una lista dada de objetos (cuerda, clip, lápiz, etc.) según su longitud.
- Tareas en las que los escolares tengan que enumerar objetos de la misma longitud que otro objeto dado.

Observa que estas tareas están encaminadas a desarrollar en los escolares la idea de longitud y de cantidad de longitud.

b) Identifica otras tareas de Primaria que tengan los propósitos que acabamos de indicar. Justifica tu respuesta.

2.2. Objetivos de aprendizaje de la superficie

a) Todos los cuerpos están limitados por superficies, algunas de las cuales predominan y organizan nuestra percepción. Como en el caso de la longitud, los escolares han de desarrollar una percepción sensible inicial sobre lo que se entiende por superficie de objetos concretos —una mesa, el suelo de la clase o el envoltorio de un paquete—. Han de aprender a comparar y ordenar objetos según su superficie. La noción de superficie se va completando a medida que los escolares aprenden las propiedades de conservación, composición aditiva y transitividad de la superficie. Es importante que los escolares comprendan que el área y el perímetro de un objeto no están relacionados de forma directa: puede haber objetos con mucho perímetro pero poca superficie, y viceversa.

b) En cuanto a las unidades de medida de superficie, los escolares han de manejar como referencia principal la unidad cuadrada, lo que les ha de llevar a conocer las unidades estandarizadas metro cuadrado (m^2), sus múltiplos y submúltiplos, que van de 100 en 100. Pero también han de aprender a usar otras unidades de medida no convencionales, como por ejemplo un folio, el triángulo rectángulo unidad o las piezas del tangram. También han de aprender a realizar transformaciones entre estas unidades de medida de superficie.

c) Los escolares han de aprender a contar el número de unidades cuadradas que componen una figura utilizando materiales como el geoplano o el papel milimetrado. Estos procedimientos de medición directa conllevan el aprendizaje de métodos de descomposición, recomposición, completación y superposición de figuras poligonales. Los procedimientos de medición directa de superficies juegan un papel principal en Primaria. No obstante, los escolares también han de aprender procedimientos de medición indirecta mediante la aplicación de fórmulas de área del rectángulo, triángulo, trapecio, polígonos regulares y círculo. Además, han de estimar la superficie en situaciones sencillas como las que se indican en el punto siguiente.

d) Entre los problemas contextualizados que se espera resuelvan los escolares

© Ediciones Pirámide

cabe destacar las situaciones en las que es necesario medir una superficie con algún propósito (por ejemplo, han de aprender a calcular la pintura necesaria para pintar una pared), o situaciones de reparto justo en las que, por ejemplo, han de repartir una superficie irregular de forma equitativa. Han de saber elegir la unidad adecuada a cada situación.

ACTIVIDAD 2: Considera la siguiente tarea para escolares de entre 10 y 12 años.

Construye un cuadrado de papel y dóblalo por la mitad, haciendo coincidir un lado con otro. Vuelve a doblarlo por la mitad de la misma forma que antes (como indica la figura 13.1).

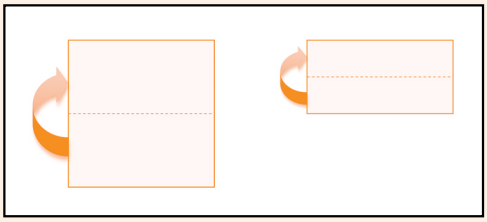


Figura 13.1

Desdóblalo y córtalo por los dobleces; obtienes cuatro tiras iguales. Responde a las siguientes preguntas sin medir:

- Si colocamos las cuatro tiras en dos filas, obtenemos un rectángulo. ¿Tiene el mismo perímetro que el cuadrado inicial? ¿Y la misma área?
- Si ahora ponemos las cuatro tiras en una sola fila, el nuevo rectángulo ¿tiene el mismo perímetro que el cuadrado? ¿Y la misma área?

Ahora puedes medir y así comprobar si las respuestas que has dado son correctas.

Justifica a qué objetivos de los indicados antes contribuye esta actividad.

2.3. Objetivos del aprendizaje de la capacidad

a) A diferencia de la longitud y de la superficie, propiedades que se presentan en la totalidad de los cuerpos físicos, la capacidad no es un atributo general de cualquier cuerpo. Hay cuerpos que pueden contener a otros, servir de recipientes bien a líquidos o bien a áridos (granos, legumbres, frutos secos, arenas o gravas). La cualidad de determinados cuerpos para servir de recipientes o contenedores es lo que identifica en ellos su capacidad. Así, se habla de la capacidad de una vasija o de un recipiente como la propiedad de un objeto de contener otros, de servirles de recipiente. Por el contrario, hay otros cuerpos que no tienen la cualidad de recipientes, y por ello no se habla de su capacidad.

ACTIVIDAD 3: Haz un listado de recipientes usuales en tu entorno familiar y escolar. Describe en cada caso cuál es su uso convencional, qué es lo que suelen contener.

Describe cinco objetos distintos que no se pueden usar como recipientes, que carecen de capacidad.

b) La unidad de medida para la capacidad es el litro (l). Sus múltiplos y divisores siguen el mismo sistema de múltiplos y divisores que el metro, ya que sus unidades de distinto orden se corresponden con las del sistema decimal de numeración y se nombran con los mismos prefijos. La tradición y su utilidad práctica han impuesto el uso de medidas fraccionarias para medir la capacidad de un recipiente. Los escolares de Primaria deben conocer y manejar referentes del litro, del medio litro, del tercio de litro, del cuarto de litro, etc.; es decir, deben identificar recipientes que tengan estas capaci-

© Ediciones Pirámide

dades, singularmente en el almacenaje y uso cotidiano de líquidos. En cuanto a las unidades de medida, los escolares han de manejar unidades no convencionales como una cuchara, un plato sopero, un vaso, una jarra, una botella, una garrafa y otros muchos recipientes cotidianos. También deben conocer recipientes agrarios de su medio social, las unidades tradicionales y su equivalencia en litros.

c) Los escolares han de aprender métodos directos para comparar capacidades de recipientes como:

- Contar las cucharas que contiene un plato sopero.
- Contar los vasos que equivalen a una botella.
- Contar los litros que contiene un cubo mediante botellas.
- Comprobar que una botella mide 1/3 de litro, 1/5 de litro, etc.

Como ocurre en el caso de la superficie, los procedimientos de medición conllevan el aprendizaje de métodos de descomposición, recomposición, completación y llenado de recipientes sencillos.

d) Para manejar líquidos se necesita que estén contenidos en algún recipiente. Es conveniente que los escolares comprueben que la capacidad de un recipiente no depende del tipo de líquido que contenga, ya que se trata de una propiedad del contenedor, no de lo contenido. La capacidad de un recipiente viene dada por su medida en litros; es una medida del recipiente, e indica el líquido que contiene o puede contener, sin importar qué líquido sea.

La capacidad de los recipientes está presente en el medio social y, por tanto, la diversidad de problemas que surgen al medir, operar, estimar y calcular con su capacidad es muy amplia.

ACTIVIDAD 4: Identifica en un libro de texto de Primaria las lecciones que introducen y estudian la magnitud capacidad. Describe el tratamiento que se proporciona a los distintos objetivos enumerados.

2.4. Objetivos de aprendizaje del volumen

a) Al espacio ocupado por un cuerpo se le llama su volumen. Todos los cuerpos ocupan un espacio, es decir, todos los cuerpos tienen volumen. Como en el caso de la longitud y de la superficie, los escolares han de desarrollar una percepción sensible inicial sobre lo que se entiende por volumen de objetos concretos. Los escolares han de desarrollar una percepción sensible inicial sobre lo que es el volumen de objetos concretos —una caja, un libro—. Han de aprender a comparar y ordenar objetos según su volumen. Esta noción se completa según los escolares aprenden las propiedades de conservación, composición aditiva y transitividad del volumen. Usualmente se habla del volumen de los objetos sólidos, pero también tienen volumen los objetos líquidos (el contenido de una jarra, de una botella, etc.) y los objetos gaseosos (volumen de oxígeno en una botella, de hidrógeno líquido en un depósito, etc.).

En el caso de una cantidad de líquido o de gas hay que distinguir dos nociones estrechamente relacionadas: su volumen —espacio ocupado por el líquido o gas (¿cuánto ocupa?)— y la capacidad del recipiente que lo contiene (¿cuánto cabe?).

Como objeto físico, una cantidad de líquido tiene un volumen; como contenido de un recipiente sirve para establecer la capacidad del recipiente. Esta relación es compleja y en Primaria se inicia su estudio. En este apartado nos

© Ediciones Pirámide

ocuparemos del volumen. Esta magnitud también cumple propiedades de conservación, composición aditiva y transitividad que los escolares han de aprender.

Es importante que los escolares no establezcan una relación directa entre el volumen y la superficie de un objeto tridimensional: puede haber objetos con mucha superficie pero poco volumen, y viceversa.

b) La unidad estandarizada de volumen que se usa como referencia principal es el cubo unidad, lo que lleva a conocer las unidades estandarizadas metro cúbico (m^3), sus múltiplos y submúltiplos, que van de 1.000 en 1.000. Para trabajar el volumen hay que recordar que se habla de un volumen de agua y de la capacidad de su recipiente, que da lugar a la relación fundamental: el volumen de agua contenido en una botella de un litro es de un decímetro cúbico. De ahí que 1 litro equivale a 1 dm^3.

Por un mal uso del lenguaje, en ocasiones se identifica el volumen de un recipiente con su capacidad, al equiparar dicho volumen con el volumen del líquido que contiene. El volumen del recipiente es irrelevante para su capacidad, ya que depende de las propiedades físicas del cuerpo elegido como recipiente. Distintos recipientes, con distintos volúmenes, pueden tener la misma capacidad. A su vez, distintos recipientes, con distinta capacidad, pueden tener igual volumen. Estas cuestiones no son apropiadas para que las trabajen y aprendan los escolares en Primaria, pero forman parte del conocimiento del profesor que debe orientar dichos aprendizajes.

ACTIVIDAD 5: Proporciona un ejemplo que muestre diferencias entre volumen y capacidad de un cuerpo.

c) Los escolares han de aprender métodos directos, como:

- Contar el número de cubos unidad que componen una figura.
- Emplear probetas graduadas o recipientes graduados en los que sumergir objetos.

Como ocurre en el caso de la superficie, estos procedimientos de medición conllevan el aprendizaje de métodos de descomposición, recomposición, completación y llenado de objetos tridimensionales sencillos (formados por cubos unidad). De manera secundaria, han de aprender algunas fórmulas básicas de cálculo de volumen, como la del ortoedro y el paralelepípedo. Además, en algunos casos, como los que se indican en el punto siguiente, han de estimar el volumen.

d) Entre los problemas contextualizados sobre el volumen que se espera resuelvan los escolares cabe destacar las situaciones sencillas en las que es necesario determinar, por ejemplo, el volumen de agua necesario para llenar una piscina, construir objetos con un volumen dado —por ejemplo, construir una caja en la que quepan 20 cajas de zapatos— o determinar el espacio faltante —por ejemplo, calcular el hueco que queda en una caja tras llenarla parcialmente—. Han de saber elegir la unidad adecuada a cada situación.

ACTIVIDAD 6: Diseña una actividad de Primaria para que los escolares no relacionen la superficie y el volumen.

Indicación: puedes utilizar figuras construidas con cubos unidad.

3. APRENDIZAJE DE LA MEDIDA DE MAGNITUDES

El aprendizaje de las magnitudes y su medida se desarrolla a lo largo de toda la etapa Primaria e incluso la Secundaria. Durante este

© Ediciones Pirámide

largo proceso aparecen estructuras complejas, que se apoyan en un conjunto de propiedades de las magnitudes. Enunciamos a continuación las propiedades que suelen utilizarse de manera habitual en la literatura para describir la evolución en el aprendizaje de la medida.

- Conservación: la cantidad de magnitud no cambia cuando se modifica el objeto mediante transformaciones isométricas.
- Transitividad: si un objeto es mayor que otro y éste es mayor que un tercer objeto, entonces el primero es mayor que el tercero.
- Composición aditiva: la cantidad de magnitud de un objeto se mantiene mediante fragmentación del objeto en partes y su posterior reordenación y suma.
- Iteración de la unidad: la unidad de medida es una parte de un todo, y dicha parte se puede reiterar para cubrirlo por completo mediante composición aditiva.
- Igualdad de tamaño en las unidades: es necesario que las unidades de medida que se reiteran para cubrir un objeto sean iguales.

En las subsecciones siguientes damos algunos detalles sobre el aprendizaje de la longitud, la superficie y el volumen. El nivel de desarrollo escolar de las propiedades que acabamos de presentar nos ayudará a describir parte de dicho proceso de aprendizaje.

3.1. Aprendizaje de la longitud

Los escolares desarrollan la idea de longitud a partir de experiencias sensibles con atributos como la altura, la anchura o la profundidad de distintos objetos. Al comparar, clasificar y ordenar distintos objetos atendiendo a sus dimensiones, desarrollan la idea de cantidad de longitud. En los primeros momentos, los escolares realizan comparaciones mediante la superposición directa de los objetos. Por ejemplo, deciden si dos lapiceros son iguales o no, y los ordenan según su longitud, sin más que poner uno al lado de otro (figura 13.2).

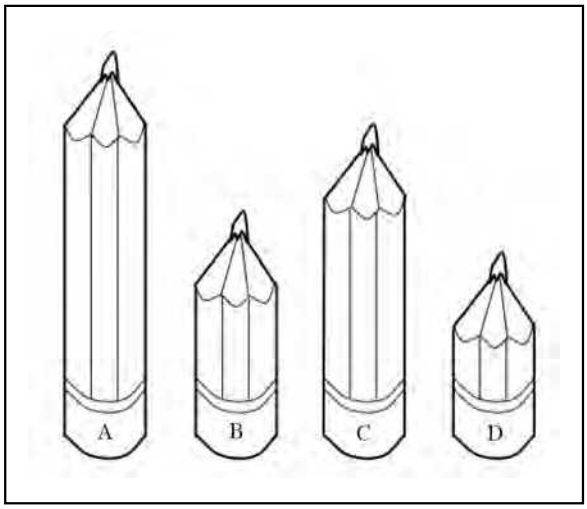


Figura 13.2.—Lapiceros de distinta longitud que se comparan directamente.

Seguidamente, los escolares empiezan a utilizar un objeto intermediario para realizar comparaciones. Este objeto puede ser más largo que los objetos a medir, en cuyo caso hacen una marca en el objeto para transportar la medida de un objeto a otro. Tienen dificultades para utilizar objetos intermediarios más pequeños que los objetos a medir, aunque comienzan a utilizarlos. Por ejemplo, miden mediante palmos para comparar la anchura de dos mesas colocadas en distintas habitaciones o usan pasos para comparar el largo de dos aulas del colegio. Desarrollan así la noción de transitividad de la longitud.

Después emplean un objeto intermediario cualquiera, y cuando éste es menor que los objetos a comparar miden recubriendo los objetos

© Ediciones Pirámide

por reiteración. Aprenden así la idea de unidad de medida con unidades no convencionales y aplican estrategias de medición directa.

A continuación perciben la necesidad de utilizar unidades estandarizadas compartidas por todos y establecen relaciones entre distintos sistemas de medida. Comprenden que el tamaño de la unidad elegida está en relación inversa al número de unidades necesario para expresar la medida (cuanto más grande es la unidad de medida, menos unidades se necesitan).

Desde el punto de vista de la conservación de la longitud, los escolares asimilan que una cuerda no cambia su longitud aunque la enrollemos o la coloquemos en forma poligonal (figura 13.3).

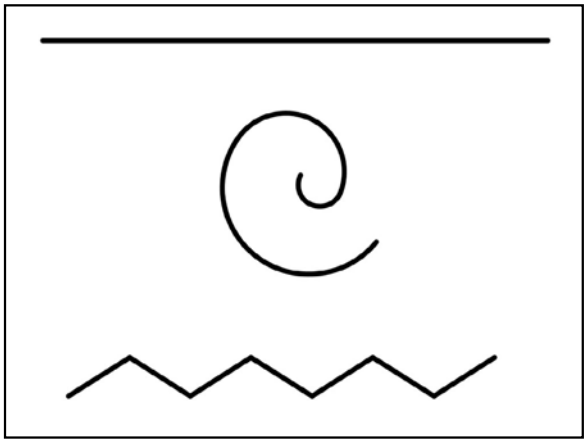


Figura 13.3.—Conservación de la longitud.

Desarrollan la idea de composición aditiva cuando perciben, por ejemplo, que la imagen poligonal de la figura 13.4 se puede recortar y recolocar para obtener su longitud.

Al usar diferentes unidades de longitud obtendrán distintos valores numéricos para expresar la longitud. Es así como perciben la necesidad de que todos usemos el mismo convenio

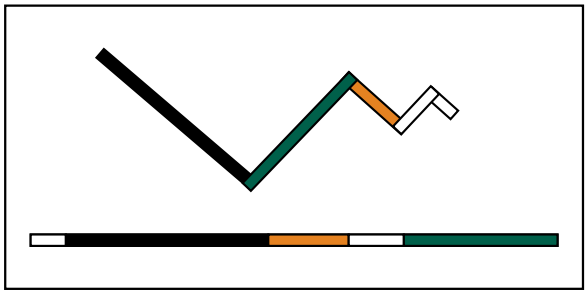


Figura 13.4.—Composición aditiva de la longitud.

para comunicarnos. Aprenden las unidades estándar —el metro, sus múltiplos y submúltiplos— y establecen relaciones entre las distintas unidades empleadas.

3.2. Aprendizaje de la superficie

Los escolares perciben la idea de superficie manipulando objetos y comparándolos respecto de su superficie. Comienzan haciendo comparaciones directas; por ejemplo, superponen dos cartulinas para determinar cuál es mayor. Seguidamente, desarrollan la idea de cantidad de superficie al tratar como equivalentes todos los objetos con igual superficie y al ordenarlos respecto de esta cualidad; por ejemplo, un folio es equivalente a una baldosa; ambos son más grandes que la pantalla del teléfono, etc.

ACTIVIDAD 1: Diseña una tarea de Primaria en la que se utilice el tangram con el propósito de desarrollar la idea de cantidad de superficie.

Para que los escolares desarrollen la idea de conservación de la superficie es necesario que asimilen, por ejemplo, que la superficie de una mesa no cambia si contiene muchos o pocos objetos (figura 13.5), o que objetos de muy dis-

© Ediciones Pirámide

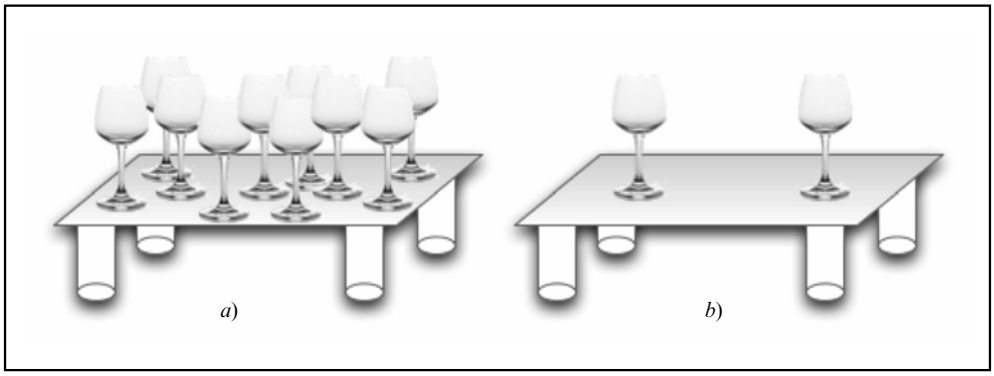


Figura 13.5.—Experimento de conservación de superficie.

tinto aspecto tienen la misma cantidad de superficie (figura 13.6).

Situaciones como las de la figura 13.6 también permiten a los escolares desarrollar la idea de composición aditiva, ya que a través de estas situaciones aprenden que al sumar las superficies de las partes en las que se ha descompuesto un objeto se obtiene la superficie del objeto mismo.

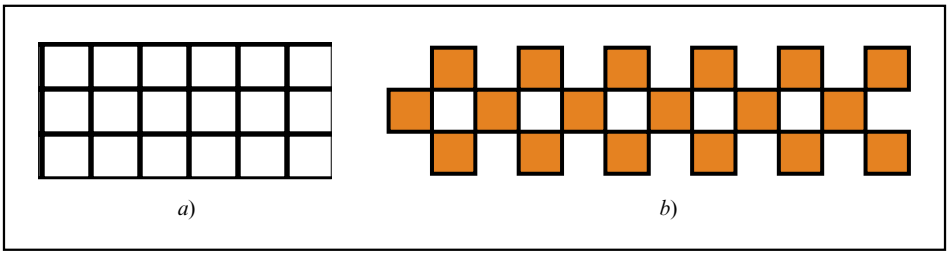


Figura 13.6.—Objetos con distinto aspecto e igual superficie.

Estos conocimientos son la base para que los escolares aprendan a emplear la unidad cuadrada, con sus múltiplos y submúltiplos, reiterándola sobre distintos objetos para obtener la superficie. Aprenden a recubrir los objetos sin dejar huecos ni repetir trozos. Las figuras se van haciendo más complejas, con lo cual los escolares aprenden a descomponer y recomponer una figura en otra más sencilla con la misma cantidad de superficie (figura 13.7). Estas acciones contribuyen a que los escolares desarrollen las propiedades de conservación y de composición aditiva.

Por último, los estudiantes aprenden las fórmulas de cálculo del área de las figuras elementales, pueden argumentar la validez de dichas fórmulas en situaciones sencillas —comprobando, por ejemplo, que el número de unidades cuadradas que caben en un rectángulo coincide con el producto de la base por la altura— y aprenden a realizar estimaciones controlando la precisión del resultado.

© Ediciones Pirámide

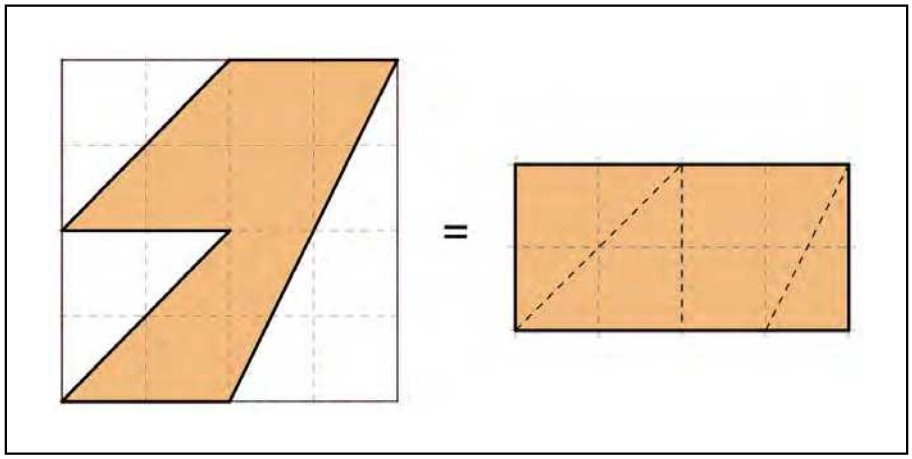


Figura 13.7.—Descomposición y recomposición de superficies.

ACTIVIDAD 2: Selecciona dos tareas de Primaria en las que se muestre la utilidad de la estimación de la superficie.

3.3. Aprendizaje de la capacidad y del volumen

Los escolares aprenden la noción de volumen después de haber aprendido la noción de capacidad. En el primer caso los objetos que manejan son cuerpos sólidos (cajas, bloques de madera), mientras que en el segundo trabajarán con recipientes (botellas, vasos).

Los escolares realizan las primeras comparaciones de la capacidad de dos recipientes mediante el llenado y vaciado: al rellenar con líquido uno de ellos y verter el contenido en el otro, ven si sobra o falta líquido.

Seguidamente, los escolares utilizan vasos de líquido como unidad de medida para aprender a hacer mediciones directas de la capacidad por reiteración de la unidad.

Para calcular el volumen de un cuerpo sólido mediante procedimientos directos, los escolares comienzan reconociendo el cubo unidad como patrón de medida y lo reiteran hasta formar el cuerpo considerado. El manejo de figuras de tipo prisma compuestas por cubos unidad (figura 13.8) les permite descomponer y recomponer un espacio. Este es un punto clave en el aprendizaje del volumen: es necesario que los escolares visualicen y piensen en secuencias de cubos horizontales y verticales de manera estructurada y consistente. Estos modelos les permite identificar las partes que componen un objeto tridimensional y les ayuda a descomponerlo y recomponerlo. Es importante que los escolares desarrollen esta habilidad para realizar un llenado adecuado del espacio ocupado por un objeto, sin dejar huecos ni repetir partes. Las representaciones empleadas también juegan un papel esencial: los recipientes y cajas pasan a ser dibujos planos de figuras tridimensionales como la de la figura 13.8. Ante este tipo de representaciones, es fundamental que el escolar pueda imaginar cuántos cubos unidad componen el interior de una figura tipo prisma o cuántos hay en una zona no visible.

© Ediciones Pirámide

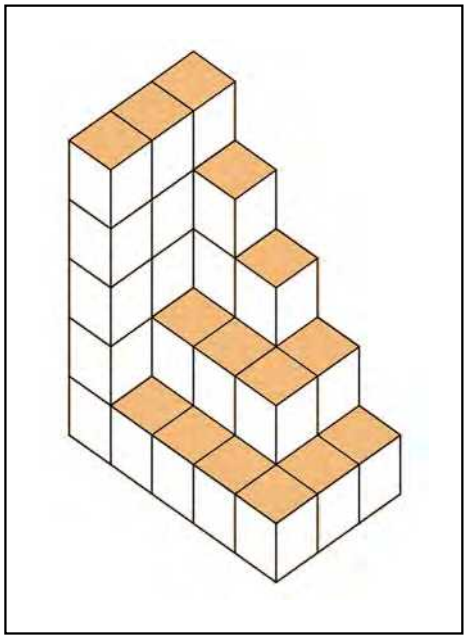


Figura 13.8.—Representación de una figura tipo prisma en la que hay cubos unidad no visibles.

Para saber si los escolares han desarrollado la propiedad de conservación del volumen se realizan experimentos como el siguiente:

Se consideran dos torres como las de la figura 13.9, ambas formadas por 36 cubos unidad, la primera de base 3×3 y la segunda de base 9×2. Los escolares que no conservan el volumen consideran que las torres no ocupan el mismo espacio.

El conteo de cubos unidad en el caso del prisma permite a los escolares deducir la fórmula básica *largo* × *alto* × *ancho*.

4. DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA

Clasificamos a continuación las dificultades más habituales en el aprendizaje de la medida en Primaria y las acompañamos de los errores en los que incurren los escolares.

4.1. Dificultades asociadas a la conservación de la cantidad

La forma y la posición que presentan los objetos son factores dominantes en la experiencia sensible de los escolares. Por ello, relacionan la longitud, la superficie o el volumen de un objeto con su aspecto o con su posición.

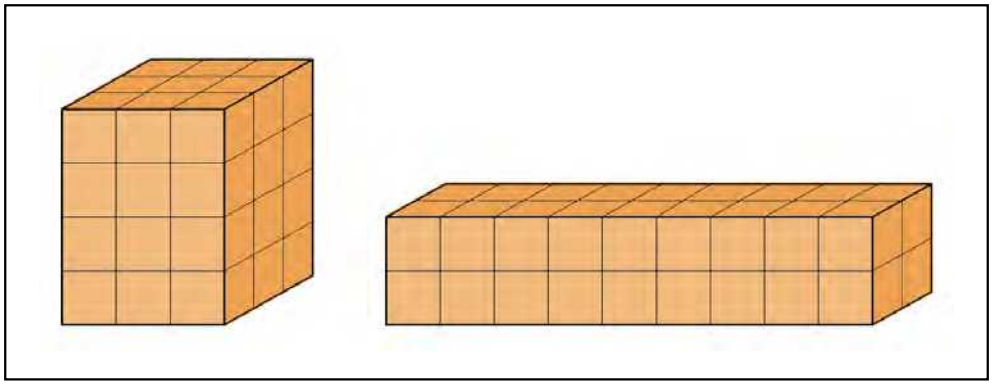


Figura 13.9.—Conservación del volumen.

© Ediciones Pirámide

Ejemplos en el caso de la longitud

Los estudiantes afirman que una varilla B es más larga que otra A si su extremo está más adelantado (figura 13.10.*a*), o que dos varillas A y B tienen la misma longitud si sus extremos están colocados en la misma vertical de la cuadrícula (figuras 13.10.*b* y 13.10.*c*).

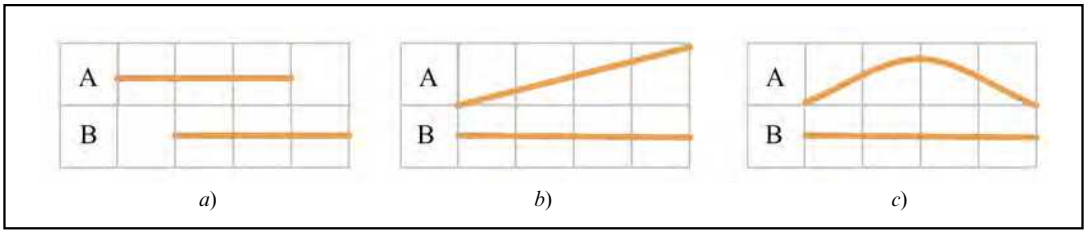


Figura 13.10.—Figuras que inducen a incurrir en errores de conservación de longitud.

Ejemplos en el caso de la superficie

Como hemos visto, algunos escolares piensan que una mesa que tiene colocados encima muchos objetos tiene mayor área que otra con menos objetos (figura 13.5). También piensan que un objeto que ocupa más espacio tiene más área, aunque tenga muchos huecos, como es el caso de las imágenes *a*) y *b*) de la figura 13.11, que se han construido de manera que tienen el mismo área, pero los escolares perciben que *a*) tiene un área mayor que *b*).

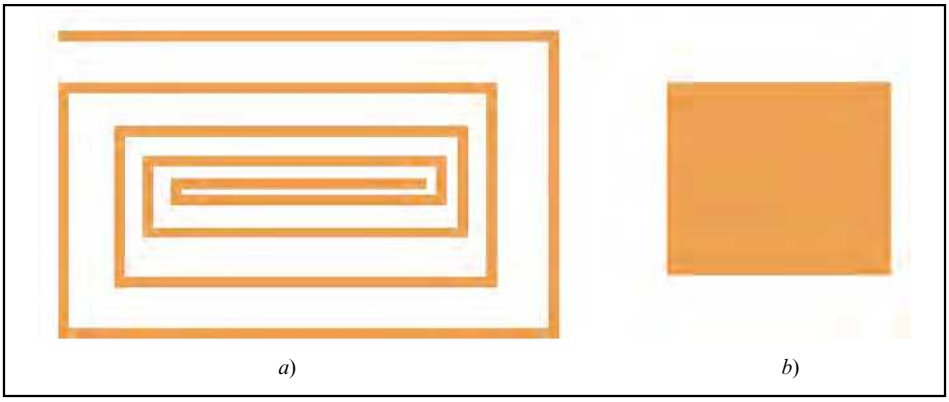


Figura 13.11.—Error de conservación de superficie.

Ejemplos en el caso del volumen

Como hemos visto, algunos escolares piensan que una torre de cubos de base cuadrada ocupa menos que otra de base rectangular alargada (figura 13.9). Los errores se reproducen ante tareas de hueco sobrante. Por ejemplo, responden negativamente cuando se pregunta si el hueco que queda en una caja es el mismo al colocar en ella una bola de plastilina grande

© Ediciones Pirámide

o dos bolas de plastilina pequeñas, cuyo volumen conjunto es equivalente al de la grande (figura 13.12).

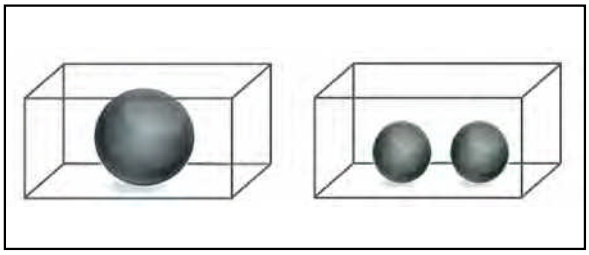


Figura 13.12.—Error de conservación del volumen: el hueco sobrante no es el mismo.

En este mismo ejemplo, algunos escolares no perciben la equivalencia entre el volumen de la bola grande de plastilina y la suma del volumen de las dos bolas pequeñas, a pesar de haber visto que las dos bolas pequeñas se obtenían al separar en dos la bola grande.

4.2. Dificultades asociadas a la percepción de la magnitud

Percibir una magnitud requiere la capacidad para aislar un atributo de un objeto ignorando otros atributos que se perciben al mismo tiempo. Con frecuencia, los escolares establecen relaciones erróneas entre dos o más de dichos atributos.

Relación perímetro-superficie

Algunos escolares piensan que a igual superficie, igual perímetro, o que a mayor superficie, mayor perímetro. Por ejemplo, afirman erróneamente que las imágenes de la figura 13.13 tienen la misma superficie.

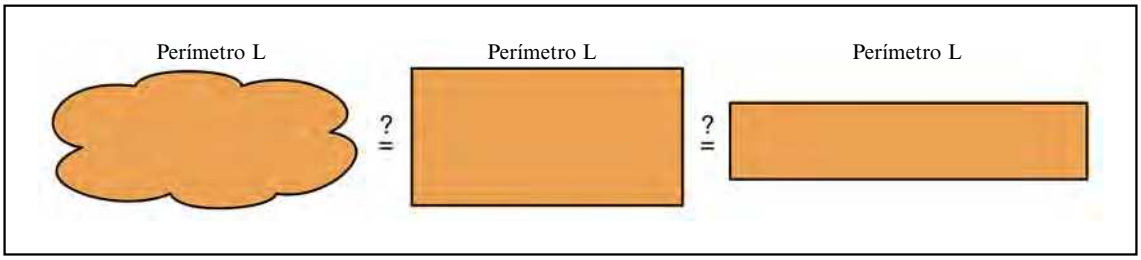


Figura 13.13.—Figuras con igual perímetro y distinta superficie.

Este vínculo se extiende hasta edades avanzadas, en las que ya se ha introducido el manejo de fórmulas para el cálculo de la superficie. Por ejemplo, algunos escolares no reconocen que los triángulos de la figura 13.14 tienen la misma superficie, a pesar de conocer la fórmula y observar que tienen la misma base y la misma altura; domina en ellos la percepción de que el triángulo con mayor perímetro debe tener mayor superficie.

Relación superficie-volumen

Algunos escolares, para calcular el volumen de figuras compuestas por cubos unidad, cuentan los cubos que se ven en la superficie. Por ejemplo, en el prisma de la figura 13.15 responden que tiene un volumen de 66 unidades, cantidad que corresponde a la superficie. No perciben que cuentan algunos cubos más de una vez y que ignoran los cubos interiores; este úl-

© Ediciones Pirámide

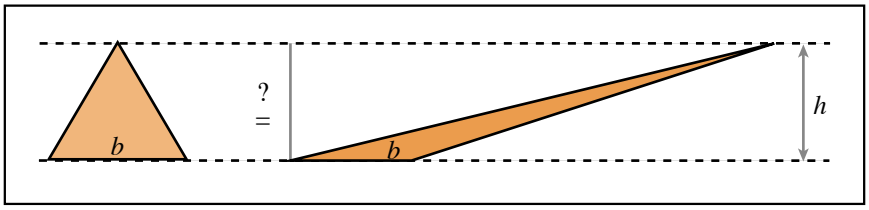


Figura 13.14.—Triángulos con igual superficie y distinto perímetro.

timo error también está relacionado con dificultades asociadas a la visualización, que presentaremos más adelante.

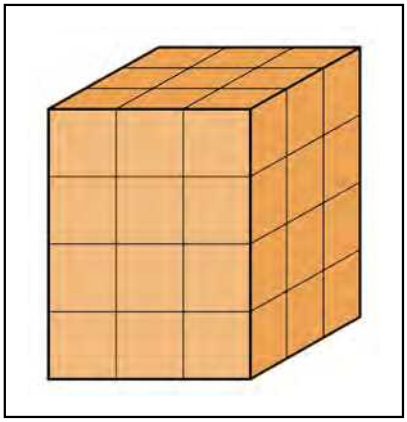


Figura 13.15.—Prisma formado por cubos unidad.

4.3. Dificultades asociadas a la unidad de medida

La idea de unidad de medida es un concepto técnico muy elaborado, que resulta bastante complejo para los escolares de Primaria. Hay numerosas dificultades asociadas a ella.

Dificultades asociadas a la reiteración de la unidad

Al medir la longitud, algunos escolares no reutilizan la unidad y responden que no pueden medir un objeto que mide 4 clips cuando sólo disponen de 3 clips. Al recubrir un objeto para medirlo superponen trozos de unidad o dejan huecos. Por ejemplo:

- Amontonan 3 clips sobre un objeto que mide 2,5.
- Colocan un clip girado cuando queda un trozo pequeño por medir.
- Espacian 3 clips sobre un objeto que mide 3,5.

Si utilizan una cinta métrica, la colocan sobre el objeto a medir, empezando en el 1 y no en el 0. No consiguen calcular la longitud si la cinta métrica está rota y empieza, por ejemplo, en 3.

Dificultades asociadas a la igualdad de tamaño en las unidades

Algunos escolares usan unidades de distinto tamaño para medir. Por ejemplo:

- Al medir la longitud, combinan indistintamente clips y lapiceros para cubrir el objeto a medir.
- Al medir la superficie, cuentan el número de trozos en que está dividida la superficie, aunque esos trozos sean desiguales. Por ejemplo, responden que la figura construida en el geoplano que se muestra en la figura 13.16 tiene una superficie de 10 unidades.

© Ediciones Pirámide

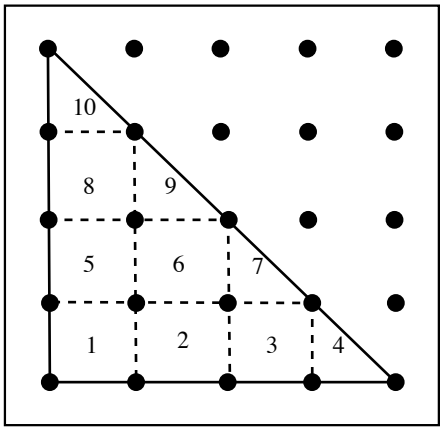


Figura 13.16.—Conteo de unidades de superficie de distinto tamaño.

Dificultades asociadas a la relación inversa entre tamaño de la unidad y número de unidades

Los escolares piensan que un número más grande corresponde a una mayor longitud, ignorando el tamaño de la unidad de medida. Por ejemplo, algunos escolares cuentan las 9 unidades que componen el segmento *a*) de la figura 13.17 y las 5 unidades del segmento *b*), y afirman que *a*) mide más que *b*), puesto que 9 es mayor que 5.

Análogamente, en el caso de la superficie, algunos escolares consideran que el rectángulo *a*) tiene más superficie que el rectángulo *b*) (figura 13.18).

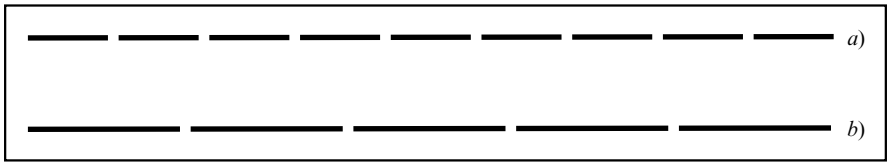


Figura 13.17.—Proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de longitud y la medida.

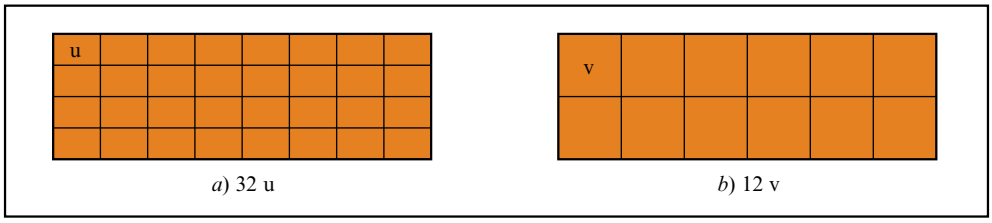


Figura 13.18.—Proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de superficie y la medida.

ACTIVIDAD 1: Selecciona o diseña tareas de Primaria en las que:

- Se utilicen unidades de medida no convencionales.
- Se perciba la relación entre la unidad de medida elegida y la medición obtenida.
- Se exprese la misma cantidad de magnitud mediante distintas unidades de medida.
- Haya que elegir la unidad de medida adecuada a la cantidad de la que se dispone.

4.4. Dificultades asociadas a la introducción temprana de fórmulas

Cuando se introducen demasiado pronto las fórmulas para obtener el área o el volumen, los escolares las usan de forma incorrecta y sin sentido. Por ejemplo:

- Suman en vez de multiplicar para calcular la superficie del rectángulo; por ejemplo,

© Ediciones Pirámide

si tienen un rectángulo de lados 3 y 5 responden que tiene superficie 8.
- Sustituyen erróneamente los valores de los parámetros en las fórmulas. Por ejemplo, al emplear la fórmula del área del triángulo, algunos escolares sustituyen el valor numérico de un lado del triángulo en lugar de la altura.

El empleo prematuro de fórmulas también anula el desarrollo de otras estrategias de medida de magnitudes. Por ejemplo, algunos escolares no saben cómo calcular la superficie de la figura 13.19, por no disponer de una fórmula inmediata y desconocer las estrategias de descomposición y recomposición que permiten recomponer la figura en un rectángulo. Estas estrategias son importantes no sólo como método de cálculo de superficie, sino también para desarrollar las propiedades de conservación y composición aditiva.

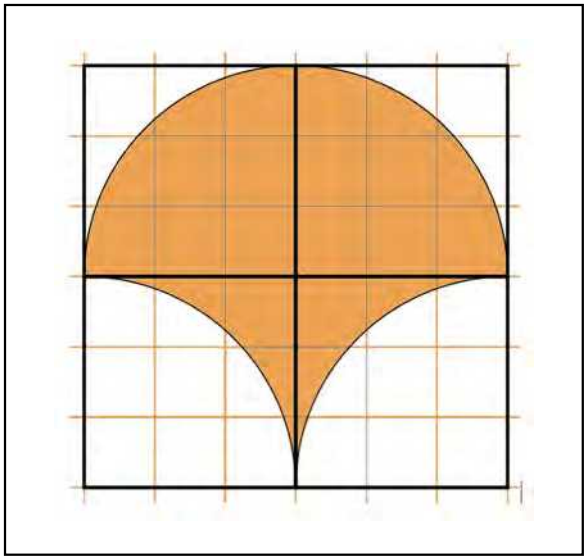


Figura 13.19.—Figura compleja que se descompone y recompone en una simple.

4.5. Dificultades asociadas a la visualización

Se trata de dificultades fundamentalmente relacionadas con el cálculo del volumen. Están asociadas al tipo de representación utilizada.

- Si se usan figuras compuestas por cubos unidad construidas con algún tipo de material manipulativo, algunos escolares incurren en el error de no considerar los cubos interiores. Por ejemplo, responden que el prisma de la figura 13.15 tiene un volumen de 34 cubos unidad, ya que sólo cuentan los cubos exteriores de dicho prisma.
- Si se usan dibujos de figuras tridimensionales en papel, la dificultad de visualización aumenta. Por ejemplo, algunos escolares responderían que el objeto dibujado en la figura 13.8 tiene un volumen de 22 unidades (los cubos unidad visibles en el dibujo), pues no pueden imaginar las caras que no se ven.

ACTIVIDAD 2: Identifica en libros de texto de Primaria figuras que se proponen habitualmente para tratar la superficie y el volumen. Observa sus representaciones y reflexiona: ¿Te parecen adecuadas? ¿Qué cambiarías?

4.6. Dificultades asociadas a la linealidad

Los escolares aplican la linealidad en numerosas situaciones matemáticas, aunque la situación no admita un tratamiento lineal. En el caso de la superficie y el volumen se producen errores como los siguientes:

- Los escolares olvidan y no aplican que las unidades del Sistema Métrico Decimal

© Ediciones Pirámide

para la superficie van de 100 en 100, y las unidades de volumen de 1.000 en 1.000.

- Algunos escolares piensan que al duplicar la longitud de los lados de un rectángulo se duplica su área, o que al duplicar los lados de un cubo se duplica su volumen.
- En situaciones de manejo de escalas, si, por ejemplo, la superficie que ocupa una habitación en un plano es 6 cm^2 y la escala del plano es 1:300, algunos escolares afirman que la superficie de la habitación real es 1.800 cm^2.

Este tipo de errores asociados a la linealidad aparecen en Primaria, pero se trabajan con más intensidad en Secundaria.

ACTIVIDAD 3: Redacta tareas en las que el escolar se enfrente a algunos de los errores expuestos. Explica cómo le ayudarías a superarlos: qué instrucciones le darías, qué nuevas tareas, qué material, etc.

5. ENSEÑANZA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA

El proceso de aprendizaje de las magnitudes geométricas que hemos descrito en la sección 3 es coherente con un planteamiento sobre la enseñanza que se puede organizar atendiendo a tres períodos: percepción-comparación, unidades y procedimientos de medida, y estimación. La figura 13.20 muestra las acciones que habitualmente realizan los escolares en cada período.

A continuación ilustramos, mediante tareas para Primaria, un posible proceso de enseñanza apoyado en estos períodos. Cada tarea ejemplifica un período, entendiéndose que la tarea pone el énfasis en ese período, pero posiblemente tiene relación con los otros. Debido a las diferentes organizaciones que pueden darse al implementar el currículo en el aula, no indicaremos a qué curso corresponden las tareas, pero las presentaremos en orden de dificultad creciente. En ellas también aparecen materiales

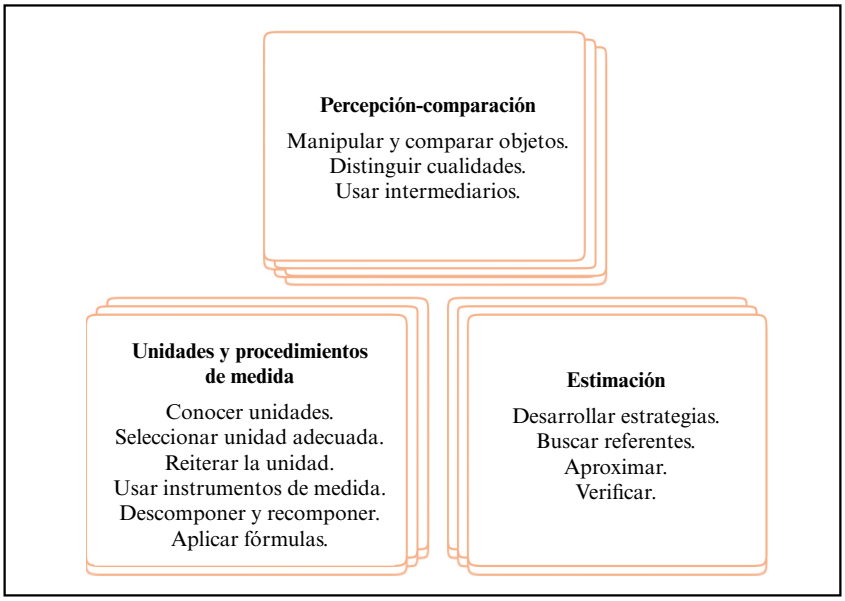


Figura 13.20.—Períodos en la enseñanza de las magnitudes geométricas.

© Ediciones Pirámide

didácticos habituales en la enseñanza de las magnitudes geométricas.

ACTIVIDAD 1: Relaciona estos tres períodos con los componentes del sentido de la medida, desarrollado en el capítulo 7.

5.1. Tareas para percibir y comparar magnitudes

Las tareas escogidas para este período tienen como propósito que los escolares reconozcan el atributo que debe ser medido y que hagan comparaciones de tamaño.

La comparación según ciertos atributos permite aislar una magnitud de otras y clasificar todos los objetos que tienen la misma cantidad de magnitud. Las primeras comparaciones de longitud que se realizan consisten en superponer los objetos. Este método también sirve para la superficie cuando los objetos tienen la misma forma.

Longitud

Los atributos físicos asociados a la longitud son la anchura y la largura de un objeto, la altura, la distancia, el grosor, la profundidad, etc. Los escolares perciben la longitud ante experiencias como las siguientes, en las que manejan estos atributos.

Ejemplo 1

Observa los siguientes objetos:

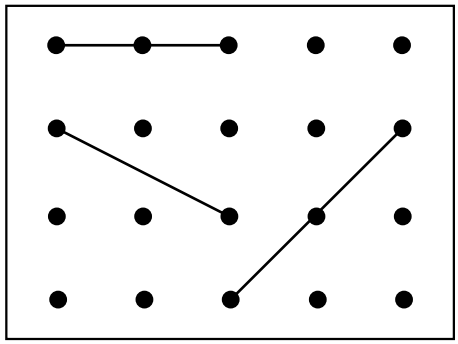
- Un bolígrafo.
- Un clip.
- Una cuerda.

¿Cuál es el más largo? ¿Y el más corto? ¿Podrías ordenarlos según su longitud?

Las primeras comparaciones de longitud se realizan superponiendo los objetos. Más adelante se proponen tareas en las que no es posible realizar una comparación directa. Por ejemplo, si se trata de comparar la anchura de dos aulas del colegio, es necesario usar un objeto intermediario y transportarlo de un lugar al otro. Otras tareas de comparación pueden ser más complejas y exigen un razonamiento. Por ejemplo, para comparar las longitudes aparentemente parecidas construidas en el geoplano en la tarea que se muestra a continuación podrían usar el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 2

¿Cuál de los segmentos siguientes es el más largo? ¿Y el más corto?



Otra actividad de comparación interesante que exige un razonamiento es la siguiente:

Ejemplo 3

Se sabe que la distancia entre Santander y Granada es de 877 km. Sin embargo, España mide unos 700 km de norte a sur. ¿Cómo es esto posible?

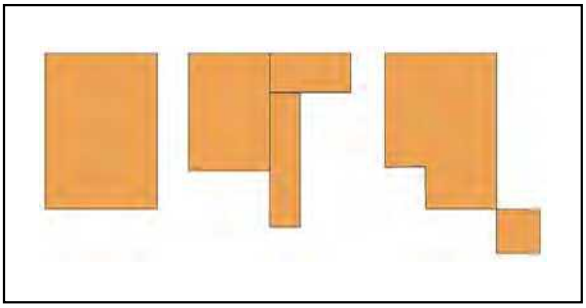
© Ediciones Pirámide

Superficie

Los escolares perciben la superficie mediante acciones como recubrir una mesa, empaquetar un regalo, pavimentar el suelo, etc. Esta percepción se afianza cuando comparan la superficie de distintos objetos. Se pueden proponer tareas como las siguientes.

Ejemplo 4

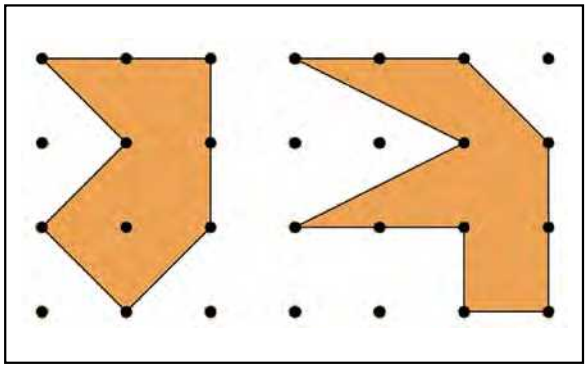
El profesor tiene varias cartulinas iguales. Corta una de ellas en rectángulos y recoloca éstos de distintas formas, posiblemente suprimiendo alguno de ellos. Repite el procedimiento varias veces, obteniendo así varias composiciones, como las que muestra la figura siguiente. El escolar ha de comparar las composiciones —normalmente superponiendo los trozos de cartulina— y ha de ordenarlas de menor a mayor superficie.



Las superficies construidas en el geoplano no se pueden superponer directamente. En estos casos, los escolares han de llevar a cabo algún tipo de razonamiento para comparar las superficies. Por ejemplo, en la tarea siguiente pueden comparar rectángulos y mitades de rectángulos para concluir que la parte izquierda es más pequeña que la derecha.

Ejemplo 5

¿Cuál de las figuras siguientes tiene más área?



La percepción de la superficie se afianza si se distingue de otros atributos, como el perímetro. Tareas como las siguientes ayudan a este propósito.

Ejemplo 6

Dibuja una figura que tenga poca área y mucho perímetro.

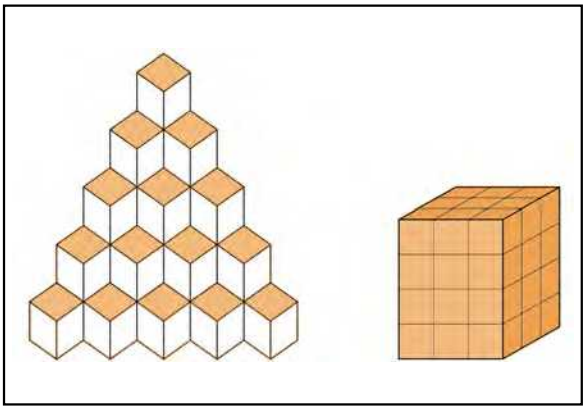
Volumen

El volumen consiste en el espacio que ocupa un objeto, el hueco que queda al sacarlo de una caja. Los escolares perciben la idea de volumen al realizar tareas como las siguientes.

Ejemplo 7

¿Cuál de estas dos figuras tiene más volumen?

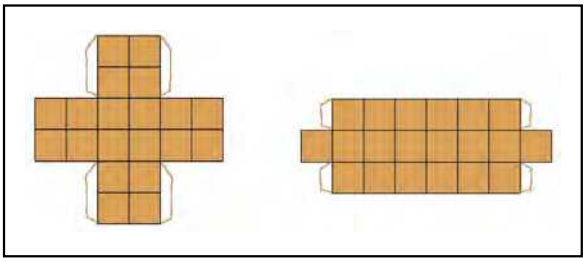
© Ediciones Pirámide



La percepción del volumen se afianza si se distingue de otros atributos, como la superficie. Tareas como la siguiente ayudan a este propósito.

Ejemplo 8

Recorta las siguientes plantillas y construye con ellas cajas de cartón. ¿Cuál de las dos cajas tiene más superficie? ¿Cuál de las dos cajas tiene mayor volumen?



ACTIVIDAD 2: Busca en libros de texto algunas tareas más en las que se pretenda que los escolares perciban la longitud, la superficie y el volumen.

ACTIVIDAD 3: Enumera cuatro materiales didácticos que consideres adecuados para la enseñanza de la longitud, de la superficie y del volumen.

5.2. Tareas para aprender unidades y procedimientos de medida

Las tareas centradas en las unidades de medida buscan que el escolar se haga consciente de la noción de unidad de medida y de la importancia de usar unas unidades u otras. Se han de emplear distintas unidades de medida en una gran variedad de situaciones. Se comienza con el empleo de unidades de medida no estandarizadas, y posteriormente se introducen las medidas estandarizadas, como se ve en las tareas siguientes.

Ejemplo 9

¿Cuántos palmos de ancho tiene el pupitre?

¿Cuántos folios caben en el tablón de anuncios sin que se solapen entre sí?

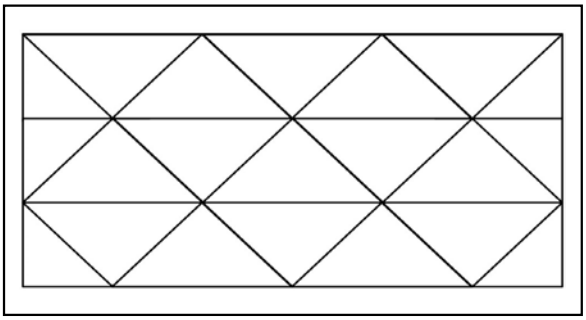
Ejemplo 10

María tiene que medir el largo de su mesa de clase y el de su mesa de estudio en casa. En clase emplea clips y obtiene una medida de 17 clips. En casa no tiene clips y emplea un bolígrafo; obtiene una medida de 5 bolígrafos. ¿Cómo puede decidir cuál de las dos mesas es más larga?

Ejemplo 11

El área del rectángulo que aparece en la figura es 36 unidades. ¿Cuál será la unidad que se ha empleado para obtener esa medida?

© Ediciones Pirámide

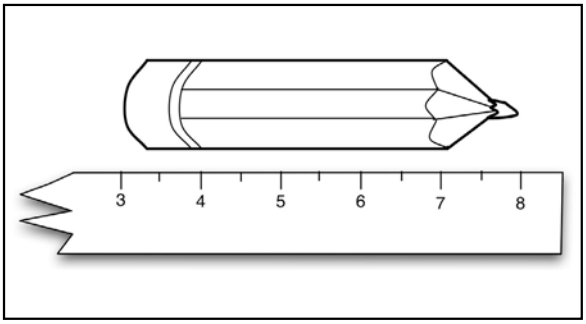


Para enseñar procedimientos para medir se proponen tareas en las que el escolar tiene que obtener medidas en distintos contextos. Cada contexto está asociado a una unidad de medida, un instrumento de medida y un procedimiento de medida concreto. Es importante que los escolares midan objetos reales, no sólo dibujos en papel.

La mayoría de los procedimientos que se emplean en Primaria suelen ser de tipo directo. Las siguientes tareas muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 12

Se nos ha roto un extremo de la regla, pero ¿cuánto mide el lapicero?

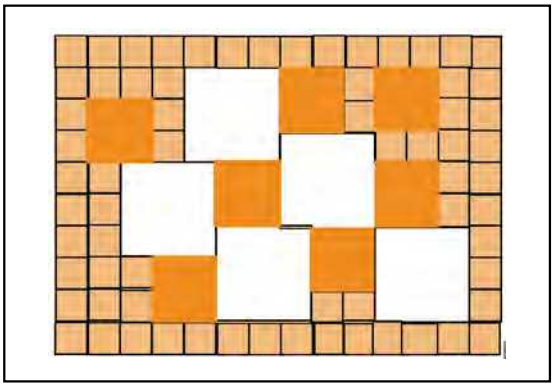


Ejemplo 13

¿Cuánto mide el contorno del campo de fútbol del colegio? Piensa qué instrumento y qué unidad de medida emplearemos para medirlo.

Ejemplo 14

La figura siguiente representa el embaldosado de la plaza del ayuntamiento. Hay baldosas grandes blancas, baldosas medianas negras y baldosas pequeñas grises. Se va a hacer una renovación y quieren poner todas las baldosas iguales. Pero no saben si ponerlas todas blancas, todas negras o todas grises. El precio entre ellas es muy diferente: cada baldosa blanca cuesta 60 euros, la baldosa negra cuesta 30 euros y la gris 10 euros. ¿Podrías ayudarles haciendo un presupuesto en cada caso? Ten en cuenta que en algún caso quizá tengan que desperdiciar trozos de baldosa.



Una vez estudiados los procedimientos de medición directa, se introducen los procedimientos de medición indirecta mediante cálculos y finalmente mediante fórmulas. Se puede solicitar a los escolares que hagan alguna deducción de las fórmulas a partir de datos numéricos, como ocurre en las tareas siguientes.

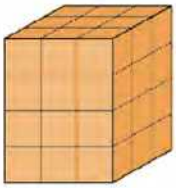
© Ediciones Pirámide

Ejemplo 15

Dibuja un triángulo rectángulo en un papel cuadriculado. Enmárcalo en un rectángulo que tenga las mismas dimensiones. ¿Qué relación observas entre el área del triángulo y la del rectángulo? Deduce una fórmula para calcular el área de los triángulos rectángulos.

Ejemplo 16

Queremos calcular el volumen del prisma recto. Completa la tabla siguiente, en la que tienes que construir prismas rectos que tengan las dimensiones que se indican y tienes que obtener su volumen. La primera fila de la tabla es un ejemplo:

Dimensiones largo, ancho, alto	Prisma recto	Volumen
3, 3, 4		36 cubos unidad
1, 2, 3		
3, 3, 2		
4, 2, 1		

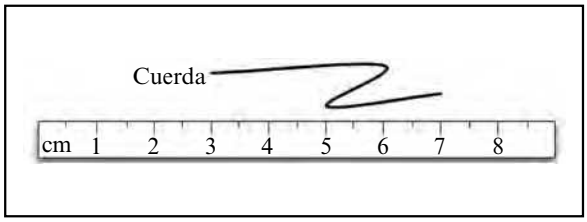
Establece una relación entre las dimensiones del prisma y su volumen.

5.3. Tareas para estimar

Es necesario plantear a los escolares situaciones en las que vean la necesidad de estimar, bien por la imposibilidad de obtener una medida exacta o bien por no ser útil la exactitud. Son ejemplos de estas situaciones las siguientes: estimar la cantidad de cable que queda en un carrete, la superficie de bosque destruido en un incendio, el volumen de petróleo vertido en el accidente de un petrolero, la cantidad de personas que asisten a una manifestación, etc. Se puede comenzar haciendo juicios subjetivos, a partir de lo cual enseguida se ve que es necesario conocer técnicas específicas. Se requiere que el escolar tenga alguna información o experiencia sobre la situación que va a estimar, que elija el orden de magnitud correspondiente a la situación, que elija la unidad de medida más adecuada, y que se apoye en algún cálculo o que emplee algún argumento para obtener el resultado. Algunos ejemplos de tareas de estimación en Primaria son los siguientes.

Ejemplo 17

Si estirásemos la cuerda de la figura, ¿cuánto mediría aproximadamente?



Ejemplo 18

Sabiendo que la canasta de baloncesto está a 3 m de altura, ¿cuál será la altura aproximada del techo en el pabellón de deportes?

© Ediciones Pirámide

Ejemplo 19

Ante la fotografía de un teleférico y su recorrido, ¿cómo podemos estimar la longitud del cable que lo sujeta?

Ejemplo 20

Disponemos de la fotografía aérea de una manifestación. ¿Cómo podemos estimar el número de asistentes?

Indicación: Calcula aproximadamente la superficie que ocupa la manifestación y emplea algún método para determinar cuántas personas caben en dicha superficie.

Ejemplo 21

¿Será posible guardar en una maleta un millón de euros en monedas de 1 euro?

Ejemplo 22

¿Cuántas cucharadas de agua caben, aproximadamente, en una botella de un litro de agua?

ACTIVIDAD 4: Identifica en la prensa una noticia relacionada con la medida que pueda usarse como recurso educativo para su enseñanza. Explica brevemente cómo usarías dicha noticia en el aula de Primaria.

ACTIVIDAD 5: Utilizando razonamientos de tipo educativo, argumenta a favor o en contra de las siguientes afirmaciones:

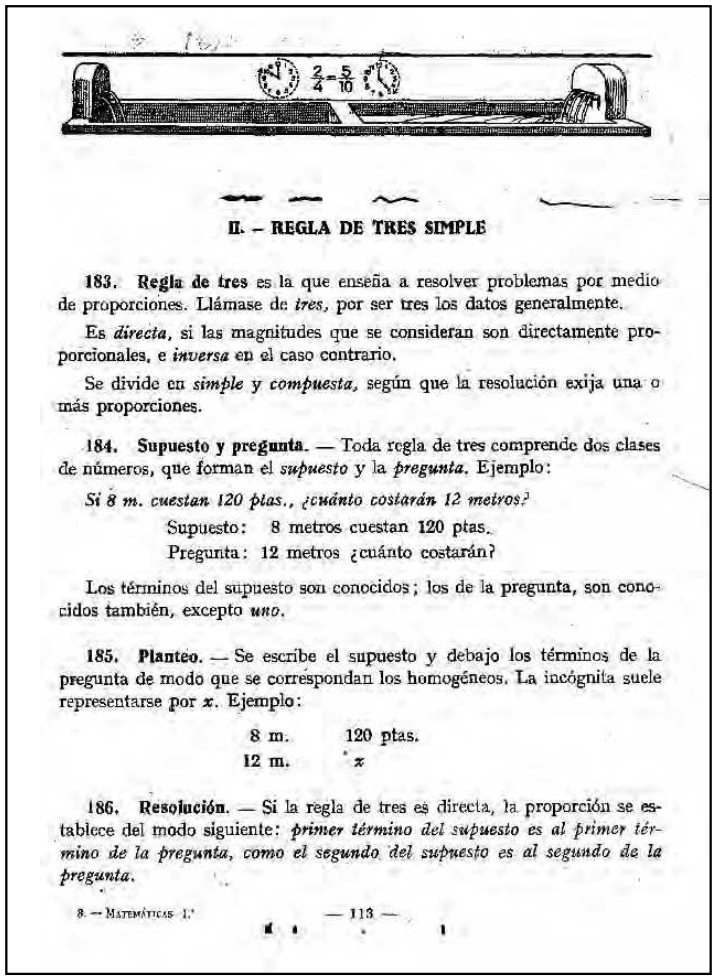
- Es importante que los escolares aprendan unidades de medida y técnicas de medida propias de su localidad, especialmente en zonas rurales.
- Es importante que los escolares hagan prácticas de medición propias de distintas profesiones: carpintero, albañil, sastre, etc.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de la razón y proporción. Porcentajes

14

ISIDORO SEGOVIA ALEX
FRANCISCO FERNÁNDEZ GARCÍA



$\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$

II. – REGLA DE TRES SIMPLE

183. Regla de tres es la que enseña a resolver problemas por medio de proporciones. Llámase de *tres*, por ser tres los datos generalmente.

Es *directa*, si las magnitudes que se consideran son directamente proporcionales, e *inversa* en el caso contrario.

Se divide en *simple* y *compuesta*, según que la resolución exija una o más proporciones.

184. Supuesto y pregunta. — Toda regla de tres comprende dos clases de números, que forman el *supuesto* y la *pregunta*. Ejemplo:

Si 8 m. cuestan 120 ptas., ¿cuánto costarán 12 metros?

Supuesto: 8 metros cuestan 120 ptas.
Pregunta: 12 metros ¿cuánto costarán?

Los términos del supuesto son conocidos; los de la pregunta, son conocidos también, excepto *uno*.

185. Planteo. — Se escribe el supuesto y debajo los términos de la pregunta de modo que se correspondan los homogéneos. La incógnita suele representarse por x. Ejemplo:

8 m.	120 ptas.
12 m.	x

186. Resolución. — Si la regla de tres es directa, la proporción se establece del modo siguiente: *primer término del supuesto es al primer término de la pregunta, como el segundo del supuesto es al segundo de la pregunta.*

8. — Matemáticas 1.º — 113 —

Lección del libro Matemáticas de Primer Curso de la Editorial Luis Vives, S. A., de 1944

© Ediciones Pirámide

La razón y la proporción son conceptos matemáticos que presentan dificultad en su enseñanza y aprendizaje en los primeros niveles de la Educación Secundaria Obligatoria, donde se trabaja en mayor profundidad. Es un contenido relevante, por estar presente en todos los ámbitos de la vida, y por eso siempre ha ocupado un papel importante en el currículo de la enseñanza obligatoria, en relación a su adquisición, desarrollo y enseñanza. Así, se deben sentar unas bases sólidas desde los niveles más básicos, como los de Educación Primaria, que es donde comienzan a trabajarse. Para ello, el maestro debe tener un dominio del tema que vaya más allá de lo estrictamente asociado a los niveles de Educación Primaria; esto le va a permitir disponer de una perspectiva de la relevancia de lo que debe enseñar, que tampoco está exento de dificultad.

La razón y proporción, y en definitiva el razonamiento proporcional, permiten comprender el significado de las relaciones lineales que pueden establecerse entre cantidades de dos magnitudes, iguales o distintas, que se sintetizan en la expresión $y = k \cdot x$, donde k es un número constante llamada razón o constante de proporcionalidad, x representa las cantidades de una de las magnitudes, e y las cantidades correspondientes de la segunda magnitud. Este conocimiento implica:

a) Distinguir cuándo una determinada relación entre las cantidades de dos magnitudes es o no de proporcionalidad, y el tipo de proporcionalidad.
b) El dominio de relaciones simples de carácter multiplicativo, como las que se presentan en los problemas denominados de razón o proporcionalidad simple; entre ellos están los cambios de unidades de medida, cambios de moneda o los porcentajes.
c) El reconocimiento, resolución e invención de los problemas denominados de proporcionalidad simple, directa o inversa.
d) El reconocimiento, resolución e invención de problemas de proporcionalidad compuesta.
e) Los problemas de proporcionalidad entre segmentos, como los relativos al teorema de Tales, que surgen de la semejanza de triángulos.
f) El reconocimiento, resolución e invención de problemas de repartos proporcionales.
g) El reconocimiento, resolución e invención de problemas de interés, tasas e índices.

Los conceptos de razón y proporción constituyen la base del razonamiento proporcional con un esquema operativo que exige el conocimiento de la igualdad de dos razones y una estrategia compensatoria entre sus términos. Su importancia tiene relación con su uso como instrumento del trabajo científico, como parte del desarrollo intelectual y como estructura conceptual que unifica y relaciona gran diversidad de nociones básicas.

El razonamiento proporcional, por último, es una estructura conceptual transversal de los sentidos numérico, geométrico, de la medida y estocástico.

En Educación Primaria, el trabajo sobre el razonamiento proporcional está limitado a situaciones de proporcionalidad simple directa y al manejo de los porcentajes.

© Ediciones Pirámide

1. FOCOS DE CONTENIDO EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

La proporcionalidad está restringida, en los niveles de Educación Primaria, a trabajar los conceptos y procedimientos más simples que, sin embargo, permiten tratar una gran variedad de situaciones problemáticas de la vida cotidiana y sientan las bases para su futuro desarrollo en los niveles de la Educación Secundaria. En cualquiera de los niveles, la proporcionalidad puede estructurarse en cuatro focos fundamentales de contenido; tres de ellos referidos a la aritmética: significado y aplicaciones de la razón, porcentaje y relaciones de proporcionalidad directa e inversa, y un cuarto referido a la geometría. En el caso de Primaria los contenidos son:

- *Significado y aplicaciones de la razón:* La razón como significado de la fracción. Razón entre dos cantidades de una misma magnitud y tasa entre cantidades de dos magnitudes diferentes. Razones equivalentes. Orden entre razones.
- *Porcentajes:* Porcentaje. Relación entre razón y porcentaje. Representación de porcentajes.
- *Relaciones de proporcionalidad:* Proporcionalidad simple. Proporción. Proporcionalidad directa; magnitudes directamente proporcionales. Constante o razón de proporcionalidad. Representaciones de la proporcionalidad. Regla de tres.
- *Proporcionalidad geométrica:* Longitud de la circunferencia. El número π. Semejanza de figuras. Proporcionalidad, longitud y superficie en figuras planas (lado y superficie de rectángulo).

ACTIVIDAD 1: Revisa las normativas curriculares actuales y elabora un listado con los contenidos referidos a la proporcionalidad. Analiza si coinciden con los expuestos en este apartado.

2. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA Y COMPETENCIAS RELACIONADAS

Atendiendo sólo a los contenidos relativos a la Educación Primaria, y siguiendo la clasificación anterior en cuatro focos de contenidos, en la tabla 14.1 se presentan también cuatro objetivos prioritarios, junto con las competencias PISA con que se relacionan.

ACTIVIDAD 1: Revisa la normativa curricular actual e identifica qué objetivos están relacionados con la proporcionalidad.

© Ediciones Pirámide

TABLA 14.1

Objetivos y competencias relacionadas de la proporcionalidad en Educación Primaria

	Objetivo	Competencia PISA[1]
Significado y aplicaciones de la razón	Interpretar el significado de la razón en distintas situaciones.	Pensar y razonar.
	Determinar el valor decimal de una razón.	Representar. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Determinar razones equivalentes.	Representar.
	Justificar la equivalencia de dos razones.	Argumentar. Comunicar. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Distinguir tipos de razones.	Pensar y razonar.
	Aplicar la noción de razón para resolver problemas.	Modelar. Resolver problemas.
Porcentajes	Interpretar el sentido del porcentaje en distintas situaciones.	Pensar y razonar.
	Calcular porcentajes de cantidades.	Pensar y razonar. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Relacionar razón y porcentaje.	Argumentar. Comunicar. Representar.
	Resolver problemas de porcentajes.	Resolver problemas.
Relaciones de proporcionalidad	Resolver problemas de proporcionalidad simple.	Resolver problemas.
	Identificar si dos magnitudes se relacionan de manera proporcional.	Pensar y razonar.
	Identificar y describir una proporción entre cantidades.	Pensar y razonar. Modelar.
	Expresar la relación de proporcionalidad mediante distintas representaciones: tablas y gráficos.	Representar. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Determinar el término desconocido de una proporción.	Resolver problemas. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Emplear la regla de tres.	Resolver problemas.
	Resolver problemas de proporcionalidad directa.	Resolver problemas.

© Ediciones Pirámide

TABLA 14.1 *(continuación)*

	Objetivo	Competencia PISA[1]
Proporcionalidad geométrica	Conocer el valor de π como la razón entre longitud y diámetro de la circunferencia.	Pensar y razonar.
	Conocer la fórmula de la longitud de la circunferencia.	Pensar y razonar.
	Determinar longitudes de circunferencias a partir de la longitud del diámetro.	Resolver problemas. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.
	Resolver problemas donde se requiera el empleo de la fórmula de la longitud de la circunferencia.	Resolver problemas.
	Reconocer y construir figuras semejantes.	Representar. Resolver problemas. Dominio del lenguaje simbólico y operaciones.

[1] MEC, 2005.

ACTIVIDAD 2: Relaciona los objetivos descritos con las competencias generales de la Educación Primaria.

3. DIFICULTADES Y ERRORES

Hay diferentes tipos de dificultades cognitivas asociadas al aprendizaje de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad de magnitudes; en definitiva, del razonamiento proporcional.

3.1. Dificultades

- Dificultades de identificación de la proporcionalidad y su tipo. El esquema proporcional es un esquema operatorio de segundo orden que requiere realizar una operación cognitiva después de completar otra; para comprender la noción de proporción hay que comparar dos razones, las cuales requieren coordinarse inicialmente a través de una relación; por ejemplo, para saber si hay relación de proporcionalidad entre el precio y el peso de un producto alimenticio hay que comparar la razón de los precios con la razón de los pesos correspondientes, y ver que son iguales; podría ocurrir que, no siendo iguales, sea una la inversa de la otra (2 y 1/2), y entonces la proporcionalidad es inversa.
- Los problemas de razón y proporción pertenecen al campo conceptual multiplicativo, más complejo que el aditivo, que, por desarrollarse éste de manera más temprana, constituye un obstáculo para el primero. Por ejemplo, la multiplicación basada en la suma reiterada genera dificultades cuando el multiplicador es un número no natural; también la división entera de números naturales genera creencias sobre las relaciones de orden entre dividendo, divi-

© Ediciones Pirámide

sor, cociente y resto, que luego resultan equivocadas cuando interviene otro tipo de números. Todos estos significados pueden explicar muchos de los errores que se producen en la resolución de problemas de razón y proporción, algunos de los cuales pueden ser simplemente de carácter operatorio. Por ejemplo, la resolución de una relación como $\frac{1,3}{2,5} = \frac{x}{5}$ ofrece más posibilidades de error que una del tipo $\frac{2}{6} = \frac{x}{24}$.

- Otra dificultad está relacionada con la naturaleza de la razón, cuando su valor procede de una constante de proporcionalidad y da lugar a una cantidad intensiva[1] que dispone de su propia unidad, como es el caso de la velocidad o la aceleración. Estas nuevas unidades requieren entender sus leyes y propiedades, además de las nociones matemáticas vinculadas a la noción de proporción. Por ejemplo, la velocidad de un objeto con movimiento uniforme constituye una razón, en este caso una tasa constante que caracteriza al movimiento ($v = e/t$), pero no lo hace si el movimiento es acelerado o retardado.
- También el tradicional aprendizaje mecánico y temprano de la proporcionalidad basada en el uso de la denominada «Regla de tres», sin una comprensión de la misma, genera errores, como no establecer la estructura de esta regla de manera adecuada, o aplicar la de proporcionalidad directa a una proporcionalidad inversa.
- Una última dificultad está relacionada con los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad que se presentan, especialmente considerar la proporcionalidad inversa como una proporcionalidad directa, o bien la forma de combinar varias relaciones de proporcionalidad a través de la proporcionalidad compuesta.

En el caso particular del porcentaje, se presentan dificultades cuando éste es mayor de 100, cuando actúa como operador, en la determinación de cuál es la operación que resuelve el cálculo y en las relaciones entre decimales y porcentajes.

3.2. Errores

A continuación se presenta una recopilación de errores tomados de diferentes investigaciones:

- Ignorar parte de los datos para resolver un problema; por ejemplo, si el problema consiste en comparar dos razones, hacerlo sólo con los antecedentes. Por ejemplo, afirmar que en dos mezclas de zumo y agua tendrá más sabor a zumo aquella que tenga más zumo, sin tener en cuenta el agua.
- Relacionar los datos de la proporción de manera aditiva, cuantificando mediante la sustracción y aplicando la diferencia al otro término para determinar el que falta. Por ejemplo, en el problema *Si 3 bolígrafos cuestan 5 euros, ¿cuánto cuestan 10 bolígrafos?,* dar como respuesta 12, es decir, hacer la diferencia 10 – 3 = 7 y sumarla a 5.
- Reducir a la unidad de manera arbitraria; por ejemplo, en el problema anterior, tomar como valor de un bolígrafo lo que valen 3 y aplicar a los 10 bolígrafos, es decir, responder 50.
- Considerar que una relación es lineal cuando no lo es; este tipo de error es conocido como *ilusión de linealidad.* Por ejemplo, admitir una relación de propor-

[1] No depende de la cantidad de materia.

© Ediciones Pirámide

cionalidad directa entre la edad y el peso de una persona; en este caso la proporcionalidad se presenta como un obstáculo al tratar de aplicarla a situaciones donde no existe esta relación; esto es debido a que se asume el esquema de la proporcionalidad como un procedimiento exitoso, que, además, genera un fuerte convencimiento de que la respuesta es correcta. Otros ejemplos persistentes están asociados a las relaciones entre las longitudes, áreas y volúmenes de las figuras; por ejemplo, entre la longitud del lado de un cuadrado y su superficie, o entre la longitud del radio y la superficie del círculo.

- Considerar una relación de proporcionalidad inversa como relación de proporcionalidad directa; por ejemplo, ante el problema *Si un recipiente tarda en llenarse con un grifo completamente abierto 4,5 horas, ¿cuánto tardará si el grifo se abre sólo tres cuartos de su caudal?,* la solución errónea consiste en aplicar la estructura de regla de tres directa, dando como respuesta $\frac{2}{6} \times \times 4{,}5 = 3{,}37 \times h$.
- Ignorar el signo del porcentaje, %, para luego reinsertarlo en la solución de manera errónea; por ejemplo, para determinar el $5\frac{1}{4}$% de 20, ignoran % y aplican sólo $5\frac{1}{4}$ para determinar la solución, que sería 105,2 en lugar de 1,052.
- Remplazar en todos los casos el número que antecede al signo % por un punto decimal a la izquierda del número; por ejemplo, como 55% es equivalente a 0,55, se supone también que 110% es equivalente a 0,110.
- Emplear la estructura multiplicativa para responder a enunciados con porcentajes mediante una respuesta multiplicativa que se adapta a una solución sencilla; por ejemplo, ante el problema *Determina en la expresión 4 = x % de 8,* dan como respuesta $x = 2$ mediante la división de 8 entre 2; si la división no fuese exacta multiplican.
- Aplicar la proporcionalidad a relaciones entre magnitudes que aumentan de manera aditiva y simultánea. Por ejemplo, la edad y la estatura de las personas. Esto hace pensar a algunos alumnos que entre edad y estatura hay una relación de proporcionalidad.

ACTIVIDAD 1: Amplía el listado de errores anterior, relativos a la proporcionalidad, con ejemplos que hayas observado en tu experiencia como estudiante o en cualquier otra circunstancia.

4. ETAPAS DEL APRENDIZAJE

Un estudio con mezclas de zumo y agua realizado por Noelting orienta cómo se produce la adquisición de la noción de razón. La tarea consiste en determinar qué mezcla, obtenida mediante un número determinado de vasos de zumo y vasos de agua que se vierten en una jarra, tiene más sabor a zumo. Resolver tareas de este tipo en su mayor grado de complejidad requiere del dominio de las nociones de razón y proporción, es decir, la consideración a la vez, y de manera coordinada, de dos dimensiones: números de vasos de zumo y de agua.

En la etapa 3-5 años, el niño es capaz de determinar qué jarra de mezcla de zumo y agua tendrá más sabor a zumo cuando la diferencia del número de vasos de zumo que se vierten en ambas jarras sea importante; por ejemplo, cuatro vasos de zumo y un vaso de agua, comparado con un vaso de zumo y cuatro vasos de agua. En caso de que las cantidades sean similares, los niños en estas edades no son capaces

© Ediciones Pirámide

de determinar correctamente los resultados de ambas experiencias, porque no son capaces de coordinar la dimensión número con la dimensión tamaño. En esta etapa los niños sólo pueden centrarse en una dimensión y de la manera que se ha expuesto. En un dominio estrictamente matemático, el niño de esta etapa puede contar y puede hacer juicios de cuantificación relativa, pero no es capaz de coordinar las dos dimensiones para decidir que, cuando el número es mayor, la cantidad es también mayor.

En la etapa 5-7 años el niño ya es capaz de coordinar dos dimensiones con la acción de contar. Sabe determinar entre dos números cuál es mayor; las dimensiones dejan de ser bipolares (alto-bajo, grande-pequeño, mucho-poco) para el niño, que, en adelante, considera valores intermedios a través de la enumeración. En este caso el niño es capaz de apreciar que una jarra tendrá más sabor a zumo porque tiene más vasos de zumo, como por ejemplo, en el caso de una mezcla de cuatro vasos de zumo y uno de agua, comparado con la mezcla de cinco vasos de zumo y uno de agua.

En la etapa 7-9 años el niño puede considerar diferentes dimensiones, pero sólo puede hacerlo de manera secuencial: primero una y después otra. Por ejemplo, si la cantidad de vasos de zumo es igual, para responder descentra y se fija en la cantidad de vasos de agua, como es el caso de dos vasos de zumo y tres de agua, con dos vasos de zumo y uno de agua.

En la etapa 9-11 años el niño es capaz de coordinar dos dimensiones empleando estrategias de compensación mediante las operaciones de suma o resta para determinar cuál tiene más sabor a zumo. Cuando las cantidades de vasos de zumo y de agua sean distintas, puede analizar las diferencias entre ambas en cada lado, para decidir cuál tiene mayor sabor a zumo. Las estrategias de compensación son de suma y resta. Los niños ya no se centran en las dimensiones de primer orden obtenidas por enumeración (cantidad de vasos de zumo, por ejemplo), sino en las relaciones opuestas; es decir, en el resultado de la operación de restar vasos de zumo y vasos de agua. Por ejemplo, en una mezcla de tres vasos de agua con dos de zumo, comparada con cinco vasos de agua con tres de zumo, una posible respuesta es que tiene más sabor a zumo el primer caso, pues hay un vaso más de agua que de zumo, mientras que en el segundo caso hay dos vasos más de agua que de zumo. En esta etapa comienza el desarrollo de una operación que juega un papel muy importante en el desarrollo del pensamiento abstracto, similar a la operación de contar en el desarrollo del pensamiento concreto, ***la razón***. Los problemas que los niños de este etapa pueden resolver son del tipo: *«si por dos euros te dan 8 cromos, ¿cuántos cromos recibes por un euro?»*.

En la etapa 11-13 años el niño deja de considerar las dimensiones de primer orden, cantidad de agua o de zumo, para tomar decisiones empleando la equivalencia de proporciones (aparecen las dimensiones de segundo orden, o razones como doble y mitad): *«hay doble de agua que de zumo en ambos lados y, por tanto, el sabor es el mismo»* es una respuesta posible. En caso de que la comparación de razones sea más complicada, emplean estrategias como las de la etapa anterior. Esta etapa se puede considerar de transición al pensamiento abstracto, que se limita en este período a problemas simples.

En la etapa 13-15 años los niños ya son capaces de la comparación de dos razones que puedan referirse a la unidad para tomar decisiones: *«hay dos vasos de zumo por cada uno de agua»*.

5. MATERIALES Y RECURSOS DE ENSEÑANZA

La aplicabilidad de los contenidos relacionados con la proporcionalidad sugieren el em-

© Ediciones Pirámide

pleo de materiales y recursos que estén conectados con ésta; en la vida cotidiana se presenta una gran variedad de situaciones que pueden llevarse al aula escolar. Otras tienen características más escolares. Presentamos algunas de ellas, clasificándolas en recursos escolares y recursos extraídos de la vida cotidiana.

5.1. Recursos escolares

Mezclas de agua y zumo

En la línea de las experiencias de Noelting, la mezcla de zumo y agua en una jarra mediante un número determinado de vasos de uno y otro líquido, de dificultad progresiva, permite una introducción a la noción de razón y proporción desde los niveles escolares más tempranos, a través de la combinación de las cantidades de vasos de zumo y agua (figura 14.1).

Ejemplo 1

¿Qué combinación, *a*) o *b*), tiene más sabor a zumo?

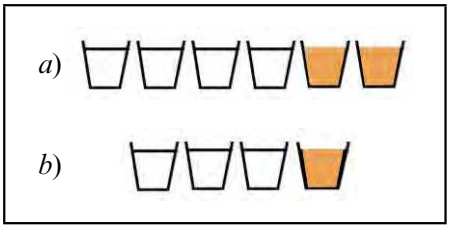


Figura 14.1

Balanza

En la línea del material anterior está la balanza empleada por De Siegler en sus experiencias. La balanza está formada por dos brazos iguales, en cada uno de los cuales puede situarse un número determinado de pesas iguales y en diferentes posiciones de cada brazo; las tareas consisten en determinar cómo se inclinará la balanza. En este caso, se combinan para la razón las cantidades de pesas y longitudes de los brazos de la balanza (figura 14.2).

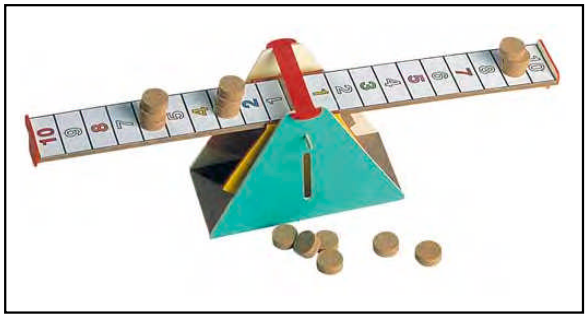


Figura 14.2.—Balanza.

Caja con canicas

Una caja con canicas de diferentes colores permite proponer tareas de determinación de los porcentajes de cada color, partiendo de situaciones en donde la suma sea 100 e incrementado la dificultad. Las canicas pueden representar cualquier tipo de cantidad discreta, como puede ser niños y niñas en un colegio (figura 14.3).

La constante de proporcionalidad π

Mediante el empleo de aros, monedas y cualquier material circular que pueda proveerse, se trata de medir con una cinta métrica las longitudes de las diferentes circunferencias y sus respectivos diámetros, y observar la relación constante que se obtiene, en base a la cual puede determinarse la fórmula de la longitud de la circunferencia (figura 14.4).

© Ediciones Pirámide

Niñas	Niños	Total	% de niñas
25	75	100	25
15	35	50	30
15	10	25	60

Figura 14.3.—Canicas y tablas con datos.

Figura 14.4.—Objetos para determinar diámetro y longitud de circunferencias.

5.2. Recursos de la vida cotidiana

Las recetas de mamá

Mediante recetas de cocina sencillas, por ejemplo paella, dadas por el número de vasos de agua y de medidas de arroz, pedir cantidades para diferente número de comensales.

Número de comensales	Número de vasos de arroz	Número de vasos de agua
2	4	12
3	6	18
5	?	?
?	20	40

Las rebajas

La propaganda de las marcas comerciales constituye también un material para proponer tareas relacionadas con el porcentaje; algunas de ellas ofertan porcentajes de descuento, y se trataría de plantear preguntas sobre el precio final; otras ofertan una reducción en el precio, lo que permite plantear preguntas sobre el porcentaje de descuento (figura 14.5).

Figura 14.5.—Propaganda como recurso para determinar porcentajes.

La compra en el supermercado

Un mismo producto puede ofertarse en tamaños distintos; la lógica sugiere que el más grande sale más barato, pero en algunas ocasiones no es así; en el aula los alumnos pueden disponer de diferentes situaciones para que indaguen y descubran qué producto es más ventajoso.

Ejemplo 2

¿Cuál sale más barato?

Peso	Precio	Razón g/€
250 g	10 euros	25
1 kg	35 euros	28,5

© Ediciones Pirámide

250 g 10 € 1 kg, 35 €

Figura 14.6.—Comparar recipientes de diferente tamaño y forma.

Planos, maquetas y mapas

Una maqueta, un plano, un mapa e incluso una foto constituyen materiales útiles para el trabajo de la proporcionalidad, sin necesidad de introducir la noción de escala; por ejemplo, a la vista de una foto donde aparezcan objetos de dimensiones conocidas, estimar la medida de otros objetos de dimensiones desconocidas mediante la proporcionalidad (figura 14.7).

Ejemplo 3

¿Cuánto mide aproximadamente, la botella de leche si el lechero mide 1,80 m?

Figura 14.7.—Foto para introducir la escala.

ACTIVIDAD 1: Busca ejemplos de otras situaciones que requieran del uso de algún material o recurso relacionado con la vida cotidiana e impliquen el uso de la proporcionalidad.

6. TAREAS QUE PROMUEVEN EL APRENDIZAJE

Los libros de texto incluyen tareas que se realizan tras la introducción de las nociones matemáticas; proponemos ejemplos de algunas tareas que pueden llevar al descubrimiento de las nociones con la ayuda del profesor.

6.1. Tarea para el descubrimiento de la noción de razón y la comparación de razones

Se disponen dos jarras, una de zumo y otra de agua, y como unidad de medida un vaso pequeño. En otras dos jarras vacías se vierte un determinado número de vasos de zumo y agua y se pregunta cuál de las mezclas tendrá más sabor a zumo y por qué. La progresión en la complejidad de la tarea podría ser la que se muestra en la tabla. Se pretende que el alumno descubra que la razón número de vasos de zumo/número de vasos de agua permite dar respuesta al problema (tabla 14.2).

TABLA 14.2

Tabla de mezclas

	Jarra 1		Jarra 2	
Situación	**Zumo**	**Agua**	**Zumo**	**Agua**
A	4	1	1	4
B	4	1	5	1
C	2	3	2	1

© Ediciones Pirámide

TABLA 14.2 *(continuación)*

	Jarra 1		Jarra 2	
Situación	**Zumo**	**Agua**	**Zumo**	**Agua**
D	1	2	2	5
E	2	3	3	5
F	1	2	2	4
H	2	1	4	2
I	1	3	2	5
J	7	3	5	2

6.2. Tarea para encontrar el valor de π como razón

La relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es de proporcionalidad directa. Para encontrar esta relación de proporcionalidad podemos proceder así:

Se disponen círculos de distinto tamaño (botellas, papeleras circulares, lapiceros circulares, etc.), se miden las longitudes y los diámetros de las circunferencias y se representan en una tabla, como la 14.3.

TABLA 14.3

Tabla de longitudes para obtener el valor de π

Objeto circular	Circunferencia	Diámetro	Razón
Lapicero	19 cm	6 cm	3,16
Botella	29 cm	9,2 cm	3,15
...			

Los alumnos pueden conjeturar a través de la tabla la relación constante entre ambas longitudes, y descubrir la fórmula de la longitud de la circunferencia, como un ejemplo de relación de proporcionalidad directa, $L = \pi D$. Esta relación permitirá también descubrir cómo aumenta la longitud de la circunferencia según aumenta el radio: si se multiplica o divide D, se multiplica o divide L por el mismo número.

6.3. Tarea para identificar relaciones y constantes de proporcionalidad

Se propone al alumnado que analice las relaciones entre distintas cantidades e investigue si éstas son de proporcionalidad o no, tratando de descubrir en su caso la relación de proporcionalidad y la constante que liga ambas cantidades y su significado. Por ejemplo, metros de cable y coste, peso de un producto y coste, o edad y estatura de una persona. Para los dos primeros casos se debe concluir con el significado de la razón como el coste por unidad.

ACTIVIDAD 1: Busca una receta de cocina y describe las relaciones y constantes de proporcionalidad que encuentres en ella.

6.4. Tarea para aprender a resolver problemas de proporcionalidad

Se propone al alumnado un problema de proporcionalidad como el del ejemplo, tomado de un libro de texto. *Cinco tabletas de chocolate cuestan 12,5 euros. ¿Cuánto cuestan 3 tabletas del mismo chocolate?* Partiendo de que estamos ante una relación de proporcionalidad, los alumnos pueden tratar de descubrir el coste de la unidad *(resolución por reducción a la unidad)*, y de ahí determinar el coste de cualquier otra cantidad. El empleo de la *Regla de tres* como artificio matemático debería surgir de la organización de los datos en una tabla y del cálculo del término que falta en la igualdad de dos fracciones equivalentes.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 2: Infórmate de los precios que tienen en una tienda una botella de refresco de dos marcas distintas y con capacidades distintas, y un paquete con seis botellas de esas mismas marcas. Con los datos obtenidos enuncia tres problemas, dos de los cuales estén basados en la proporcionalidad y el otro no.

6.5. Tareas para aprender el significado del porcentaje

Partiendo de material referido a rebajas y etiquetas de productos que indican porcentaje, precio actual y anterior, se pide a los alumnos que relacionen ambas cosas: diferencia de precios y porcentaje de descuento. Se trata de dar respuesta a las preguntas: ¿qué significa que una prenda esté rebajada un 30%? ¿Qué es el 30% de una cantidad? ¿Cómo se calcula? ¿Cómo puede representarse? ¿Qué relación tiene con la proporcionalidad?

ACTIVIDAD 3: Encuentra en dos libros de texto tareas que se utilicen para introducir la noción de porcentaje y valóralas.

7. ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA

La investigación da sugerencias de cómo los niños desarrollan su capacidad para el razonamiento proporcional y da pautas para su enseñanza, como:

1. Proporcionar tareas de razón y proporción en variedad de contextos.
2. Alentar discusiones y experimentaciones sobre predicción y comparación de razones.
3. Ayudar a los niños a distinguir entre relaciones proporcionales y no proporcionales, proveyendo ejemplos de cada caso y explicando las diferencias.
4. Ayudar a los niños a relacionar el razonamiento proporcional con otros contenidos matemáticos previos.
5. Reconocer que los métodos rutinarios, como el algoritmo de la regla de tres para resolver proporciones, no desarrollan el razonamiento proporcional.
6. Emplear métodos de enseñanza basados en experiencias y reflexiones que den significado a los conceptos.

7.1. Algoritmo versus métodos intuitivos

Una enseñanza basada en el empleo del algoritmo de «la regla de tres» comienza por establecer la estructura que relaciona las cantidades, después de constatar que se trata de una relación de proporcionalidad; por ejemplo:

6 libretas ..... 3,6 euros
12 libretas ..... n euros

Esta estructura lleva a la resolución en varios pasos: $\frac{6 \text{ libretas}}{12 \text{ libretas}} = \frac{3{,}6 \text{ euros}}{n \text{ euros}}$, de donde n euros $\times$ 6 libretas = 3,6 euros $\times$ 12 libretas. Estas expresiones, tanto en una igualdad como en otra, carecen de significado, no generan razonamiento proporcional y no ayudan en la resolución de otros problemas.

Una alternativa con más significado a esta forma de trabajar la proporcionalidad consistiría en determinar el precio de cada libreta dividiendo 3,6 entre 6, que resulta 0,6 euros por libreta, y después multiplicar por 12 para obtener el precio de las 12 libretas, 7,2 euros. Este método de *reducción a la unidad* no pierde el

© Ediciones Pirámide

significado en los pasos que lo resuelve, y se emplea la *tasa* 0,6 euros/libreta.

Otra alternativa a este procedimiento consiste en analizar la relación entre los números y observar que 12 es 2 veces 6 y, por tanto, n será 2 veces 3,6, es decir, 7,2. Este método, conocido como *factor de cambio,* puede aplicarse en situaciones de compatibilidad de los números, como en este caso 12 y 6, y se emplea la *razón* 12 euros/6 euros = 2.

Ambas alternativas se reflejan en el organigrama de la figura 14.8, que emplea el ejemplo anterior.

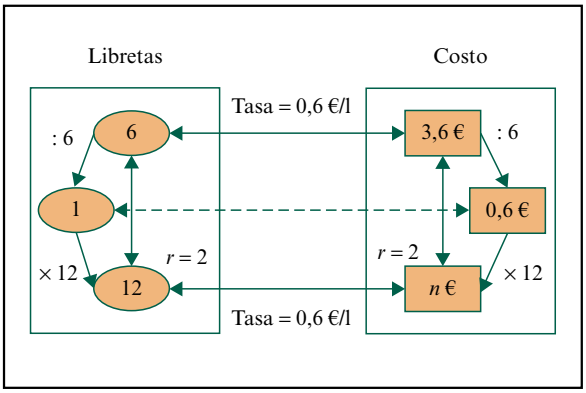


Figura 14.8.—Organigrama que expresa la reducción a la unidad.

También podrían aplicarse en la resolución la razón o la tasa inversa si resulta más sencillo, aunque en este caso la tasa 2,1 libretas por euro carece de significado.

ACTIVIDAD 1: Resuelve los problemas siguientes aplicando el método más adecuado:

Problema 1. José ha comprado 3 bolígrafos por 2,40 euros. ¿Cuánto le costarán 10 bolígrafos?

Problema 2. José ha comprado 4 bolígrafos por 3,75 euros. ¿Cuánto le costarán 12 bolígrafos?

7.2. Porcentajes

El porcentaje tiene relación con los conceptos de fracción, número decimal, razón y proporción, y el alumno debe conectar estas ideas. Primero, debe considerar que dos fracciones equivalentes pueden interpretarse como una proporción. Por ejemplo, las fracciones equivalentes 3/4 y 9/12 puede verse como la igualdad de dos razones, tres cuartos (tres de cuatro partes iguales) y nueve doceavos (nueve de doce partes iguales), que resultan de dividir una unidad de dos formas distintas, cuartos y doceavos, 3/4 = 9/12. Esta expresión puede dar una nueva, 3/9 = 4/12, igualdad de dos tasas, en cuanto que 3 y 9, 4 y 12 son partes de magnitudes diferentes.

Los problemas de porcentaje son similares a los de equivalencia de fracciones donde se relaciona una parte con un todo que se ha dividido en cien partes iguales y, por tanto, pueden resolverse mediante la proporcionalidad, por ejemplo:

Si un traje tiene un descuento del 15% y está marcado en 85 euros, ¿cuánto costaba antes del descuento?

La proporción que resuelve el problema sería $\frac{x}{85} = \frac{15}{100}$.

La ecuación anterior nos permite percibir tres tipos de problemas de porcentaje que se deben trabajar en el aula:

i) $\frac{x}{b} = \frac{c}{100}$ ii) $\frac{a}{x} = \frac{c}{100}$ iii) $\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$

ACTIVIDAD 2: Describe las características de cada situación, e inventa un problema de porcentaje para cada una.

© Ediciones Pirámide

8. TAREAS DE EVALUACIÓN

La evaluación centrada en competencias, atendiendo a los sistemas internacionales de evaluación, como el caso de PISA, debe atender a evaluar el nivel de adquisición de las siguientes componentes de la competencia matemática: Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

A continuación se presentan ejemplos de tareas donde los alumnos pueden poner de manifiesto la adquisición de estas capacidades relativas a la proporcionalidad.

Tarea 1

Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no. Explica por qué lo son o no lo son y resuelve los que puedas:

a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes a 3 € la caja, ¿cuánto costarán 12 paquetes?
b) Si un recién nacido aumenta 150 g por semana de peso en 2 meses, ¿cuánto aumentará en un año?
c) Dani puede comerse 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuántos se comerá en una hora?
d) Si 5 niños se beben 3 botellas de refresco en una comida, ¿cuánto beberán 30 niños?

Tarea 2

El Departamento de Pesca quiere estimar el número de peces que hay en un lago. Para ello captura en una red 600 peces, los marca y los suelta de nuevo. Una semana más tarde vuelve a capturar 600 peces y anota que 40 de éstos están marcados. Tras determinados cálculos, el Departamento concluye que hay unos 9.000 peces en el lago.

a) Explica cómo han llegado a esa conclusión, indicando los cálculos que permiten obtener ese resultado.
b) Razona si el resultado dado por el Departamento de Pesca es preciso o aproximado, o si podría estar muy equivocado.
c) Indica las matemáticas que se usan para resolver el problema.

Tarea 3

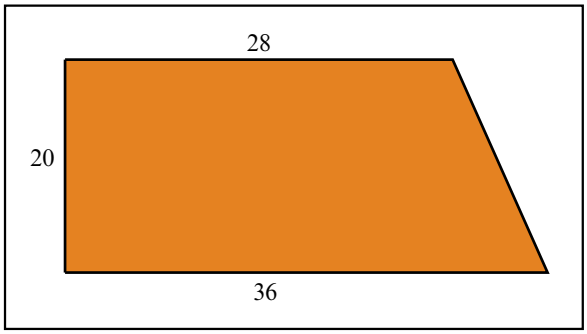
Explica la relación que hay entre los números referidos al coste de la lavadora del anuncio y justifica esa relación.

a) ¿Cuál es el precio inicial de la lavadora?
b) ¿Qué porcentaje de descuento tiene?
c) ¿Cuál es el precio de la lavadora después del descuento?
d) ¿Cuál es el precio final según el anuncio?
e) ¿Por qué no coinciden el precio final con el precio con descuento?
f) ¿Cuánto se tarda en pagar a razón de 28,25 euros mensuales?

Tarea 4

Dibuja una figura que sea semejante a la del dibujo, teniendo de altura 30 en lugar de 20.

© Ediciones Pirámide



Tarea 5

Usa una regla para determinar, según la medida del segmento de la parte inferior derecha, la distancia que hay desde Madrid a Sevilla y desde Madrid a Barcelona.

ACTIVIDAD 1: Resuelve las tareas anteriores.

© Ediciones Pirámide

Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad

15

RAFAEL BRACHO LÓPEZ
MANUEL TORRALBO RODRÍGUEZ
NATIVIDAD ADAMUZ POVEDANO
NOELIA JIMÉNEZ FANJUL

«En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico». Fischbein (1975).

Vivimos tiempos de cambios acelerados en el panorama educativo, y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben adaptarse a esta realidad. Hace unas décadas, los profesores nos esforzábamos en transmitir unos conocimientos que perdurarán toda la vida, pero que, sin embargo, no siempre servían a los estudiantes con posterioridad. Las calculadoras no estaban al alcance de todos, y pensar en un uso generalizado de los ordenadores y de Internet era entonces imposible de imaginar. Hoy día la tecnología tiene una presencia esencial y permanente en nuestro entorno, y la información cuantitativa se difunde amplia y sistemáticamente a través de los medios de comunicación. Así, se ha ido pasando de una enseñanza de las matemáticas exclusivamente determinista hacia un currículo en el que se introduce el tratamiento de la información y el azar desde la Educación Primaria. Todo ello debido a la necesidad de mostrar al alumnado una imagen más equilibrada de la realidad, en la que

© Ediciones Pirámide

están muy presentes los fenómenos estocásticos desde los primeros años de su formación.

En este capítulo se describen los contenidos de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Primaria y se muestran los objetivos de su aprendizaje. Posteriormente se examinan las limitaciones de aprendizaje de dichos contenidos, mediante la descripción de dificultades y errores vinculados. A continuación se enumeran diversas oportunidades de aprendizaje, destacando etapas y estrategias de enseñanza, en muchas de las cuales se emplean materiales didácticos.

© Ediciones Pirámide

1. FOCOS DE CONTENIDO DEL TEMA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Con la Ley de Organización General del Sistema Educativo (1990) se empezó a introducir la estadística en los cursos superiores de la Educación Primaria en España. En la actualidad, las directrices curriculares establecen un bloque de contenidos sobre esta temática, donde se distinguen dos focos temáticos que sostienen su enseñanza en un enfoque metodológico muy experimental y refuerzan los contenidos a lo largo de toda la enseñanza obligatoria. Estos focos son:

- Análisis de datos.
- Azar y probabilidad.

Dentro de cada uno de estos focos podemos destacar una serie de conceptos y procedimientos:

Análisis de datos

- Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos.
- Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
- Lectura e interpretación de tablas de datos de uso habitual en la vida cotidiana.
- La media aritmética, la mediana, la moda y el rango, y su aplicación a situaciones familiares.

Azar y probabilidad

- Carácter aleatorio de algunas experiencias.
- Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual de expresiones relacionadas con la probabilidad.
- Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
- Valoración de los resultados de experiencias en los que interviene el azar.

2. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

Ya se ha indicado en el capítulo 8 que un objetivo fundamental de la enseñanza de la estadística y la probabilidad consiste en lograr que el alumno desarrolle su sentido estocástico. En este apartado concretaremos este objetivo general.

Desde sus primeros años de aprendizaje, los niños deben ser conscientes de los fenómenos

© Ediciones Pirámide

naturales y sociales que se producen en su entorno cercano y de su tratamiento a través de las matemáticas. En especial, el conocimiento estocástico proporciona un completo abanico de nociones y de técnicas alternativas que ayudan a los estudiantes a interpretar la realidad y a actuar sobre ella de manera responsable, crítica y positiva, lo que constituye un objetivo fundamental de su aprendizaje.

A grandes rasgos, según las normativas curriculares recientes y las actualmente en vigor en nuestro país, la finalidad principal del bloque de tratamiento de la información, azar y probabilidad se materializa en la Educación Primaria a través del logro y desarrollo por parte del alumnado de actitudes y capacidades como las siguientes:

- Valorar la importancia de las matemáticas, y en particular del tratamiento de datos y el azar en la vida cotidiana, disfrutar de su uso y reconocer el valor del estudio de distintas estrategias, el rigor y la precisión en los procedimientos o la perseverancia en la búsqueda de soluciones *(competencia matemática y competencia de aprender a aprender)*.
- Valorar y adquirir habilidades propias del tratamiento de datos y el manejo del azar para afrontar situaciones diversas disfrutando de los procesos que se requieran *(competencia matemática, competencia en autonomía e iniciativa personal)*.
- Identificar hechos y situaciones del entorno para cuya comprensión se requiera el tratamiento de datos *(competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y competencia en comunicación lingüística)*.
- Utilizar el conocimiento de la estadística y la probabilidad para interpretar, analizar y producir informaciones sobre esas situaciones del entorno del alumnado a las que nos referimos, y valorar su carácter instrumental para otros campos de conocimiento *(competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y competencia en comunicación lingüística)*.
- Utilizar las técnicas de recogida de datos y las herramientas tecnológicas para el tratamiento y representación de informaciones diversas *(competencia matemática y tratamiento de la información y competencia digital)*.
- Trabajar en equipo, aceptando las opiniones de los demás y poniendo en valor el espíritu crítico *(competencia social y ciudadana)*.

ACTIVIDAD 1: En el tema 8 de este libro, sobre sentido estocástico, se describen los componentes de ese sentido. Relaciona esos componentes con los objetivos de la enseñanza de la estadística y de la probabilidad que se acaban de enunciar.

3. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

Buena parte de las investigaciones que se llevan a cabo en educación estocástica se centran en el hecho constatable de que los estudiantes se confunden con relativa frecuencia cuando se les pide realizar determinadas tareas de estos contenidos. Estos errores o carencia de argumentos para dar respuesta a determinados patrones de evaluación son previsibles, y muestran regularidades de las que se pueden extraer conclusiones que deben tenerse en cuenta al afrontar la manera de enseñar y de aprender esos contenidos matemáticos.

© Ediciones Pirámide

La asimilación inconsistente o errada de conocimientos por parte de los estudiantes se debe a la existencia de dificultades u obstáculos, que pueden tener orígenes diferentes:

- Origen ontogénico: errores debidos al desarrollo individual de cada niño o niña.
- Origen didáctico: provocados por una desacertada elección de las estrategias didácticas del profesorado.
- Origen epistemológico: relacionados intrínsecamente con el propio concepto.

Es especialmente importante que los conceptos e ideas que se vayan introduciendo sean lo suficientemente sólidos para que el conocimiento estocástico de los estudiantes se vaya generando de forma significativa y consistente.

Sin embargo, este suele ser el punto débil del aprendizaje estocástico, probablemente debido a dos motivos:

- Históricamente, la estadística y la probabilidad han sido poco trabajadas con los escolares y mal abordadas en el currículo de matemáticas de Primaria.
- El profesorado de Educación Primaria suele arrastrar carencias considerables, tanto en su propia formación estocástica como en su formación didáctica en esta rama de la matemática.

Probablemente estos motivos hacen que los obstáculos a los que se enfrenta el alumnado en este bloque temático tengan un origen fundamentalmente didáctico. Resulta importante indagar en las razones por las que buena parte del profesorado no domina suficientemente los conceptos de estadística y probabilidad que ha de enseñar, y desconozca los recursos didácticos y las herramientas tecnológicas existentes. Resulta así una combinación preocupante que, junto con la falta de tradición en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, provoca que los niños no conozcan ni aprendan gran parte de estos contenidos y adquieran únicamente significados incompletos y/o errados, que les conducen a confusiones futuras, entre otras deficiencias.

Dada la naturaleza del tema, parte de los errores didácticos provienen de que el docente aborda los conceptos estocásticos mediante estrategias similares a las que utiliza en otros temas deterministas, sin considerar su especificidad epistemológica. En este bloque de contenidos, los errores didácticos y epistemológicos están muy relacionados.

ACTIVIDAD 1: Describe algún error usual en la identificación de situaciones aleatorias y en la cuantificación de su grado de incertidumbre. Explica cómo podrías abordar dicho error con un grupo de alumnos mediante algún trabajo o actividad y contribuir a superarlo.

Nos centramos ahora, de manera más concreta, en aquellos errores y dificultades más frecuentes en el aprendizaje de los conceptos y técnicas fundamentales del aprendizaje de la estadística y la probabilidad.

3.1. Errores en la recogida y organización de datos y en su representación gráfica

Sin duda, la lectura crítica de datos es una cuestión fundamental en la sociedad de la información y el conocimiento que nos ha tocado vivir, y por ello debería considerarse un aspecto incuestionable en la alfabetización de los ciudadanos del siglo XXI.

Las investigaciones muestran que el alumnado comprende mejor los gráficos cuando se

© Ediciones Pirámide

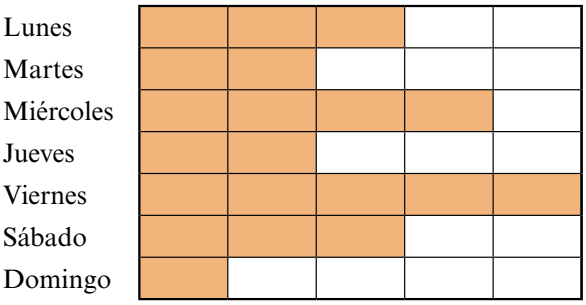
refieren a temas que les son más familiares, pero también interviene el manejo que los alumnos tengan de las herramientas matemáticas necesarias para interpretarlos, como las medidas que se representan (frecuencias, medias, etc.) y el tipo de gráfico.

Se pueden establecer tres niveles diferentes de comprensión de los gráficos:

1. «Leer los datos», requiriéndose únicamente una lectura literal del gráfico, sin necesidad de interpretación alguna de la información contenida en el mismo.

Ejemplo 1

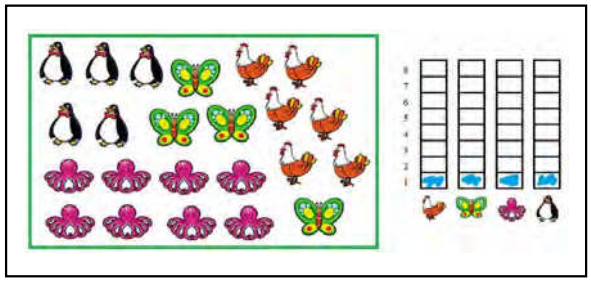
María ha representado el número de veces que ha ayudado cada día de la semana en las tareas de la casa. Di cuántas veces ha ayudado cada día.



2. «Leer dentro de los datos», nivel que sí lleva asociada la interpretación e integración de los datos representados en el gráfico y requiere ciertas habilidades y destrezas matemáticas.

Ejemplo 2

¿Cuántos animales hay de cada clase? Cuenta y representa los datos.



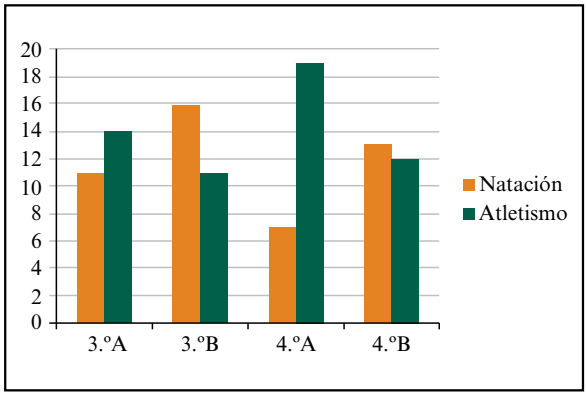
¿De qué clase hay más animales? ¿De qué clase hay menos animales?

En esta actividad el niño tiene que hacer un recuento de datos, construir el gráfico coloreando los cuadrados y, además, hay una actividad de interpretación, puesto que para responder a las preguntas tiene que hacer una comparación de los datos.

Otra actividad que se podría encuadrar dentro de este nivel es la siguiente:

Ejemplo 3

En el gráfico hemos representado qué actividad deportiva prefieren los niños de 3.º y 4.º para las actividades extraescolares del año próximo.



© Ediciones Pirámide

1. ¿Cuántos niños de 3.º B prefieren hacer natación? ¿Y atletismo?
2. ¿Cuántos niños de 4.ºA prefieren hacer natación? ¿Y atletismo?
3. ¿Cuál es el curso en el que prefieren natación más niños?
4. ¿Cuál es el curso en el que prefieren atletismo más niños?

---

3. «Leer más allá de los datos», lo que conlleva que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos que se representan en el gráfico.

Ejemplo 4

En la tabla y en la gráfica anoté el tiempo atmosférico que hizo en mi pueblo el año pasado, durante el mes de noviembre. Teniendo esos datos en cuenta, el tiempo más probable en noviembre es _____.

Este nivel es más difícil de alcanzar en esta etapa educativa, puesto que conlleva un grado de madurez del niño que muchos aún no han alcanzado. Como se muestra en la actividad, se pide hacer predicciones sencillas. Las inferencias a grandes poblaciones se consiguen en etapas educativas superiores.

ACTIVIDAD 2: En los medios de comunicación es usual la presencia de datos, junto con su organización, componentes ambos del sentido estocástico. Localiza en prensa tres ejemplos de distintos gráficos que muestren información estadística organizada. Enuncia para cada ilustración diversas preguntas que sirvan para promover un nivel de comprensión sobre los datos que se muestran.

3.2. Errores en el manejo e interpretación de la media, mediana y moda

Sin duda, la media aritmética es uno de los parámetros estadísticos más utilizados. Sin embargo, tanto en su conceptualización como en los procesos de obtención suelen darse algunos errores que pasamos a comentar.

ACTIVIDAD 3: Resuelve el siguiente problema de tres maneras distintas: gráfica, numérica y simbólica.

«Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 65 kilos y el de los hombres 90. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas?».

Identifica errores que se pueden producir en cada uno de los modos de resolución de este problema.

No puede confundirse la media general con la media de las medias, ya que hay un número distinto de hombres que de mujeres. Se puede encontrar el resultado determinando los pesos de los hombres, por un lado, y los de las mujeres por otro, y dividiendo el peso total de los ocupantes entre 10, que son los que están en el ascensor.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 4: Inventa distintas respuestas, correctas o incorrectas, que pueden proporcionar alumnos de una clase de sexto nivel a la siguiente cuestión:

«En clase se ha preguntado el número de hermanos a cada niño y se ha calculado que la media es de 1 hermano por niño. Jorge es uno de los alumnos de esta clase. ¿Cuál es el número de hermanos que puede tener Jorge?».

Discute los diferentes argumentos inventados según su mayor o menor verosimilitud.

Un posible error ante un enunciado de este tipo es que los estudiantes digan que sí se puede saber de forma exacta, y que Jorge tiene un hermano, de modo que no se reconoce la variabilidad de los datos dentro de un grupo. Otro posible error ante este tipo de enunciado es que consideren que no se puede saber el número de hermanos de Jorge; en este caso no se tendría en cuenta que la media es una medida representativa del grupo que permite hacer predicciones a nivel del mismo grupo. La respuesta esperada es que digan que se puede saber en forma aproximada el número de hermanos de Jorge, y que este número sería uno; esto muestra que los estudiantes tienen asimilado el concepto de media y su utilidad para pronosticar, por ser el valor central alrededor del cual se concentran el mayor número de datos.

En cuanto a la comprensión de aspectos conceptuales, atendiendo al hecho de que la media es un «valor típico» o «representativo» de los datos, se comprueba que, ante cualquier distribución de los datos, si se pide a los estudiantes que estimen el valor de la media, éstos tienden a ubicarla en el centro del intervalo de valores de la variable, lo cual es acertado en distribuciones simétricas, pero no en las que no lo son, por lo que en este tipo de distribuciones debe quedar claro que la moda o la mediana pueden ser valores más representativos del conjunto de datos.

Por otro lado, el cálculo de la mediana se aborda de manera diferente dependiendo de que trabajemos con variables agrupadas en intervalos o no agrupadas. Entendemos que en Educación Primaria se aplica el procedimiento de cálculo para datos no agrupados, ya que el procedimiento de interpolación para la determinación de la mediana en datos agrupados no corresponde con el nivel de formación de los niños.

Diversas investigaciones ponen de manifiesto que el conocimiento de las reglas de cálculo no implica la comprensión de los conceptos de media, moda y mediana, por lo que se hace necesario trabajar de manera comprensiva, proponiendo actividades verdaderamente significativas que no se reduzcan a meros cálculos sistemáticos.

3.3. Errores en el análisis de la dispersión de los datos

Es importante que los estudiantes conozcan desde sus primeros años de aprendizaje estadístico que el estudio de una distribución de frecuencias no debe ceñirse al de su media, su mediana y su moda, ya que distribuciones de características bien distintas pueden tener valores parecidos o incluso iguales en sus medidas de centralización. Es usual que el alumnado ignore la dispersión de los datos cuando efectúa comparaciones entre muestras o poblaciones. No obstante, como en el aprendizaje inicial de la estadística en el que nos centramos sólo se aborda de forma introductoria la idea de dispersión de una distribución, para cuyo estudio únicamente se recurre al rango como medida, lo fundamental en este aspecto es que los escolares comprendan la importancia de observar la dispersión, para que la consideren y la analicen

© Ediciones Pirámide

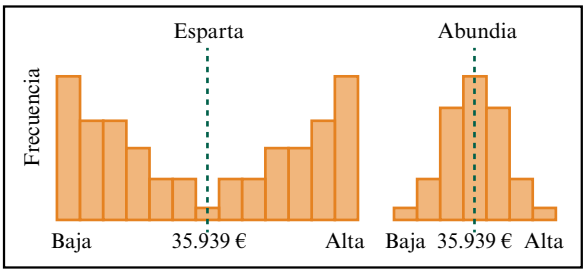
cuando ellos la aborden en un estudio estadístico, valorando así la información relativa que nos puede proporcionar el rango. Actividades como las siguientes plantean cuestiones interesantes en la introducción de estos conceptos.

Ejemplo 5

María y Luis forman una pareja; ella mide 1,69 y él 1,71. Otra pareja la forman Cecilia y Jorge; ella tiene una estatura de 1,45 y su novio, jugador de baloncesto, 1,95. Halla la altura media de cada pareja. ¿Es suficiente esta medida para describir lo desiguales que son estas parejas? ¿Cuál o cuáles medidas propondrías?

Ejemplo 6

Imagínate dos ciudades, Esparta y Abundia, con la misma mediana y media de ingresos familiares de 35.939 €. La siguiente figura muestra las dos distribuciones de los ingresos. ¿Tienen sistemas económicos parecidos las dos ciudades? ¿Por qué? ¿Es suficiente con observar la media y la mediana? ¿Por qué?



3.4. Errores en los conceptos relacionados con el azar

Diversos autores ponen de manifiesto la existencia de errores sistemáticos y conductas tipificadas persistentes en la toma de decisiones de los individuos, generalmente adultos, ante situaciones en las que el azar entra en juego. Muchos de estos errores derivan de influencias muy diversas, o bien son de tipo psicológico y no se resolverían fácilmente sólo con soporte conceptual o teórico, por lo que se hace evidente la necesidad de abordar el aprendizaje probabilístico en edades tempranas y con un planteamiento intuitivo basado en la experimentación.

Dado lo elemental del contenido probabilístico en la Educación Primaria, únicamente hacemos alusión en esta sección a la importancia de que los niños distingan los fenómenos aleatorios de los deterministas, haciendo incidencia en la importancia del buen uso del lenguaje, ya que una de las principales dificultades en la estimación probabilística en edades tempranas se debe a la imprecisión del lenguaje ordinario. Con frecuencia, a una misma expresión, relativa a fenómenos que pueden no ocurrir, personas distintas suelen asignarles grados de probabilidad diferentes, como puede comprobarse si planteamos la siguiente pregunta a un conjunto de individuos:

ACTIVIDAD 5: Cada uno de los términos siguientes expresa, coloquialmente, un grado distinto de probabilidad:

Quizá	Posibilidad razonable
Dudoso	Poca posibilidad
Podría ser	Muy posible
Casi seguro	Alta posibilidad
Se puede esperar que	Las posibilidades no son grandes

Identifica y describe en cada caso una situación distinta, adecuada para el término.

© Ediciones Pirámide

4. ETAPAS DEL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

La educación matemática es una disciplina que necesita el apoyo de otras disciplinas, como la psicología o la pedagogía. Cuando se afronta la enseñanza de un concepto nuevo es necesario conocer el razonamiento de los niños con respeto a este concepto, y su preparación para adquirir esos conocimientos. Es muy importante tener en cuenta estos conocimientos en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, ya que las ideas que trabajan son más abstractas y no están tan ligadas a la experiencia de los escolares como con otros conceptos matemáticos.

De los trabajos sobre el desarrollo evolutivo del concepto de probabilidad se extrae que el inicio para la adquisición del concepto de probabilidad es la habilidad para distinguir entre azar y posibilidad. En el *estadio preoperatorio* el niño es incapaz de hacer esta distinción entre sucesos determinísticos, y por tanto predecibles, y sucesos aleatorios, no predecibles, porque carece de la capacidad para construir relaciones lógicas como las de causa y efecto, que son necesarias para comprender por qué ocurren los sucesos.

En el siguiente escalón evolutivo, el de las *operaciones concretas,* el niño ya puede realizar algunas estimaciones cuantitativas de probabilidad, pero sólo cuando el número de sucesos es limitado y la proporción entre casos favorables y no favorables es de cálculo sencillo. Por ejemplo, los niños determinan que hay una posibilidad entre dos de que salga cara al lanzar una moneda, pero también lo aplican a que salga un uno al lanzar un dado, frente a no salir un uno. En muchos casos las destrezas necesarias para el conteo no están suficientemente consolidadas y, además, les falta madurez matemática para elaborar un modelo abstracto de un experimento de probabilidad. Un ejemplo de actividad en este nivel, extraído de un libro de texto de segundo curso de Educación Primaria, sería el siguiente:

Ejemplo 1

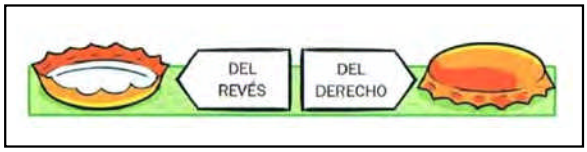
Escribe posible, seguro o imposible:

ACTIVIDAD 1: Utilizando una urna con bolas blancas y negras, describe un suceso seguro, otro imposible y otro probable.

Ya en el estadio de las *operaciones formales,* los escolares empiezan a adquirir habilidad con el análisis combinatorio y con el concepto de proporción. Encontramos ejemplos de este estadio en las siguientes actividades, la primera con relación al concepto de probabilidad con apoyo del razonamiento proporcional y la segunda relacionada con el análisis combinatorio en una situación sencilla (experimento compuesto de dos etapas):

Ejemplo 2

Busca un tapón o una chapa de botella. Tírala al aire 20 veces y anota cuántas cae del derecho y cuántas del revés. ¿En qué posición tiene más posibilidades de caer?

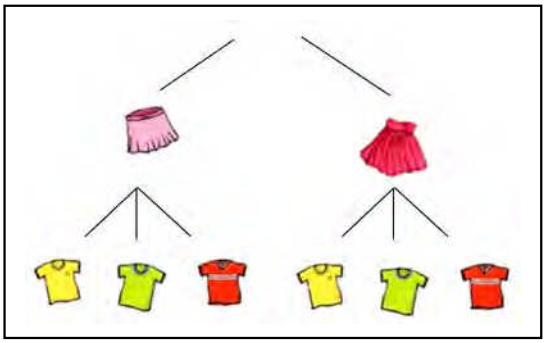


© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 2: Describe algún fenómeno cercano a un escolar de Primaria cuyas opciones de ocurrencia no sean equiprobables.

Ejemplo 3

Para el baile de fin de curso de este año han propuesto que las niñas de la clase lleven falda roja o rosa y camiseta de color rojo, amarillo o verde. ¿De cuántas maneras posibles se pueden combinar?



ACTIVIDAD 3: Mediante situaciones familiares describe el espacio de sucesos de un fenómeno usando un diagrama de árbol asequible para un escolar de Primaria.

Otras interpretaciones teóricas en didáctica de la matemática llaman la atención sobre el peso que tienen las intuiciones probabilísticas, entendiendo por intuiciones procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales. Estas intuiciones se pueden clasificar en *primarias,* aquellas que se forman antes e independientemente de la instrucción sistemática, y *secundarias,* que son las que se forman después de un proceso de instrucción y se convierten en convicciones.

Postulan que los niños, incluso en la etapa pre-operativa, tienen una comprensión preconceptual tanto de la frecuencia relativa como de la probabilidad, que está fundada en intuiciones primarias, un tipo de conocimiento implícito que evoluciona a partir de la experiencia cotidiana del niño; a medida que el niño crece, sus intuiciones primarias de frecuencia relativa, azar y probabilidad se van transformando en un concepto operativo de probabilidad. Esta transformación es un proceso mediado por la intervención escolar, por ejemplo cuando se le explican al niño las ideas básicas de la teoría de la probabilidad y las reglas del cálculo de probabilidades. Sin la instrucción explícita no se puede desarrollar un concepto operativo de probabilidad, ni siquiera en adultos.

Esta teoría tampoco está exenta de críticas. La más común subraya el hecho de que las intuiciones tienen un doble filo, en el sentido de que pueden provocar concepciones erróneas de la realidad científica, al mismo tiempo que pueden proporcionar cogniciones simplificadas de esa misma realidad.

5. ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

Los niños tienen una curiosidad innata por el mundo que les rodea, y de ahí que estén preguntando continuamente. Estas preguntas pueden ser punto de partida para el análisis de datos y la probabilidad, ya que para comprender las ideas estadísticas fundamentales los alumnos deben trabajar directamente con los datos. A medida que van superando cursos escolares, las preguntas que hacen para investigar se van adaptando de forma natural a su edad e intereses.

© Ediciones Pirámide

5.1. Estrategias de enseñanza

La principal estrategia de enseñanza nos lleva a cambiar la metodología para hacerla más activa y exploratoria, pasando del modo clásico de enseñanza de la probabilidad basado en la combinatoria a un enfoque frecuencial capaz de obviar el razonamiento combinatorio, haciendo uso de la experimentación y simulación para la resolución de problemas.

Estrategias u orientaciones para ayudar en el desarrollo del razonamiento estadístico de los escolares son:

- Involucrarles en la realización de proyectos sencillos en los que deban recoger sus propios datos a partir de la observación, de la encuesta y la medida.
- Mostrarles que cada dato singular forma parte de un todo, de modo que hay cuestiones que no pueden contestarse a partir de un solo dato, sino que necesitan del todo.
- Concienciarles sobre las tendencias y variabilidad de los datos y cómo pueden manejarse para responder preguntas sobre los datos.
- Evidenciarles, progresivamente, que los datos recogidos son una muestra, parte de una población más amplia, y determinar qué condiciones debe cumplir la muestra para que represente a toda la población.
- Guiarles en el proceso de elaboración de tablas y gráficos propios; advertirles de la facilidad con la que se puede extraer información engañosa a partir de un gráfico, en función de cómo esté elaborado.

5.2. Materiales y recursos

Materiales manipulativos

Los materiales manipulativos desempeñan una función primordial en los primeros niveles de enseñanza, ya que los niños de temprana edad necesitan referentes concretos con los que usar y dar sentido a los conceptos abstractos que se les enseñan. Se sugiere abordar los inicios de la probabilidad a través de actividades informales, con materiales como ruletas y cubos numerados que, a su vez, refuercen concepciones relativas a otros bloques de contenidos, principalmente el de números.

Veamos algunos de estos materiales:

- *Ruletas.* Se pueden fabricar en el aula por los propios estudiantes con cartulina, corcho, chincheta (para hacer de eje de giro) y lápices de colores. Este tipo de material permite utilizar sectores con áreas iguales o desiguales, y sucesos con probabilidades iguales o diferentes. También se pueden plantear problemas de probabilidades compuestas poniéndole coronas y sectores circulares.
- *Barajas de cartas.* Si nos remitimos a la baraja española, contiene datos de al menos dos variables aleatorias diferentes, el palo de la baraja y el número o figura, de modo que se puede utilizar para analizar experimentos compuestos o para el estudio de la asociación/independencia de variables. También se pueden crear colecciones de tarjetas con datos referentes a más de un atributo.
- *Dados, monedas, fichas bicolores* o cualquier objeto que tenga un número finito de posiciones, de manera que se pueda concretar el experimento aleatorio más simple posible, que es aquel que tiene un espacio muestral finito y los resultados son equiprobables. También se puede presentar un dispositivo sesgado, como un dado que tenga dos caras con un punto, y ninguna con cuatro, de modo que los sucesos ya no sean equiprobables.

© Ediciones Pirámide

Figura 15.1.—Ruletas de probabilidad (FUENTE: http://motivamates.files.wordpress.com).

Figura 15.2.—Baraja de cartas española, dados y fichas bicolores.

Figura 15.3.—Bolsa y bolas.

- *Bolas en urnas* o cualquier colección de objetos que se puedan mezclar antes de meterlos en una bolsa o urna. Este material permite generar cuatro experimentos diferentes: extracciones con reemplazamiento y sin reemplazamiento, ordenadas y no ordenadas. También sirve para el estudio de problemas de inferencia, si se usa una bolsa opaca y el estudiante desconoce la composición de la misma.

Recursos digitales

Los recursos digitales que podemos usar en este ámbito son básicos para promover el conocimiento estadístico en la escuela, además de ser útiles para crear un hábito en el uso de la estadística oficial, ya que la mayoría, como la *Web Educativa del Instituto de Estadística de Cataluña* (http://aprenestadistica.gencat.cat), trabaja con datos reales y actualizados, en contextos actuales y próximos a los estudiantes.

© Ediciones Pirámide

Los recursos digitales son una alternativa idónea y plenamente coherente con los objetivos que se pretenden en esta etapa educativa, promueven el tratamiento de la información y la competencia digital, y hacen uso explícito de las TIC como instrumento para procesar y gestionar la información, para resolver problemas reales, para tomar decisiones o para trabajar en entornos colaborativos.

Una de las novedades que presenta la web del Instituto de Estadística de Cataluña es la creación de un censo escolar que se irá alimentando a través de un cuestionario que se ha de realizar antes de utilizarla, en el que contestan de forma anónima a cuestiones sobre sus hábitos y actividades. Con esto se proponen dos objetivos principales. Por un lado los escolares se familiarizan con tareas propias de la recogida de información que, posteriormente, trabajarán en las actividades propuestas. Por otro lado, la creación de un censo según el *Census at School Program,* desarrollado internacionalmente para estudiantes de 8 a 18 años, que empezó en el año 2000 en Inglaterra y luego se ha ido extendiendo a otros países.

Cada vez son más los acercamientos entre las páginas de los institutos de estadística y los centros escolares. Otro ejemplo lo aporta el *Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía (http:/www.juntadeandalucia.es/institutodeestadisticaycartografia),* que consiste en una web pensada para escolares y que aborda muy diversos temas. Incluye el Atlas Estadístico de Andalucía, colección de mapas donde se representa espacialmente gran cantidad de información estadística, que se acompaña con recursos didácticos; también incorpora el Sistema de Información Multiterritorial de Andalucía (SIMA), el banco de datos estadísticos con mayor tradición en Andalucía, que permite consultar y representar la información en mapas gráficos.

El Proyecto Gauss es otro recurso digital que forma parte de las acciones del Programa Escuela 2.0 que lleva a cabo el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Está integrado en la web del Instituto de Tecnologías Educativas y Formación de Profesorado (ITEF), al cual da acceso la dirección http://recursostic.educacion.es/gauss. Los applets del Proyecto Gauss presentan diversos escenarios, manteniendo el equilibrio entre interactividad y claridad. De esta interactividad se obtiene una continua retroalimentación, ya que a cada acción del estudiante le corresponde una reacción de los elementos de la escena, lo cual refuerza su sensación de protagonismo y favorece un aprendizaje basado en la experiencia, en la observación y en la comprobación, y no en la memorización y repetición de procedimientos predefinidos. La claridad con que se presentan las simulaciones facilita la exploración y, como consecuencia de esa exploración, se incita a la comunicación de los descubrimientos realizados.

Las actividades de estadística y probabilidad del proyecto Gauss se organizan en tres secciones: recuento, medidas y estimación. Un ejemplo de actividad de estimación sería la carrera de coches de Mateprix; se trata de una carrera de tres coches, y lo que hace que avance un co-

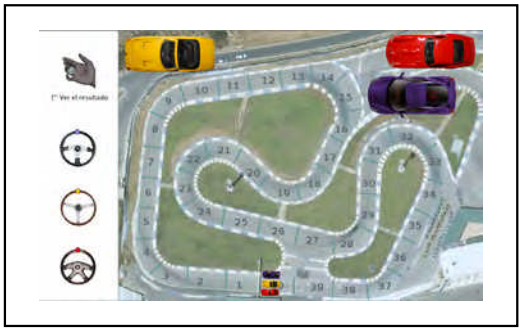


Figura 15.4.—Tablero Mateprix (imagen de la web del Proyecto Gauss).

© Ediciones Pirámide

che u otro es el resultado del lanzamiento de dos monedas, de modo que si salen dos caras avanza un coche, si salen dos cruces avanza otro coche, y si sale cara y cruz avanza el tercer coche.

La comparación de los resultados obtenidos tras cada partida por los diferentes equipos invita a la reflexión, guiada por el cuestionario que acompaña al juego, buscando la justificación de los resultados y tratando de encontrar unas reglas más justas para el juego.

La Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Utah State University *(http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html)* oferta un banco de actividades virtuales clasificadas por temas y por niveles. Cada actividad incluye el applet de la actividad, una guía didáctica para el profesorado y un enlace a los estándares de la NCTM.

5.3. Tareas que promueven el aprendizaje

A modo de ejemplo presentamos varias tareas clasificadas por ciclo.

Primer ciclo

Un tema actual de interés es el de los hábitos alimenticios. Estudios epidemiológicos de los últimos años ponen en evidencia un incremento alarmante de la prevalencia y obesidad de la población, en particular en las edades infantiles y juveniles. La complejidad de un problema como éste requiere una respuesta coordinada por parte de todos los sectores implicados, de modo que es importante trabajarlo en el aula. La siguiente actividad es un ejemplo de cómo se puede empezar a trabajar en ello.

Ejemplo 1

Proponemos a los niños la realización de un pequeño proyecto en el que tienen que ver cuáles son las preferencias de sus compañeros y compañeras a la hora del desayuno en el colegio.

La organización de los datos por categorías debe comenzar con experiencias informales de ordenar; para ello se pueden utilizar dibujos de los objetos, tarjetas con el nombre de éstos, fichas o palotes.

Bocadillo	**Zumo**	**Bollería**
Fruta	**Batido**	

Pueden empezar llamando a los compañeros por lista y preguntarles: ¿qué traes hoy para desayunar?, y anotar la respuesta al lado de cada nombre.

TABLA 15.1

Encuesta sobre el desayuno

María	**Bocadillo**
Luis	**Zumo**
Juan	**Fruta**
Felipe	**Bocadillo**
Carmen	**Bollería**
Clara	**Bocadillo**
Ana	**Batido**
Antonio	**Fruta**

Después se les puede pedir que realicen un gráfico, por grupos, para mostrar los datos. En un segundo nivel, los niños pueden decidir contar el número de compañeros que tienen el mismo desayuno.

© Ediciones Pirámide

	X				
	X				
	X		X		
	X		X		
Número de alumnos	X		X	X	
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	Bocadillo	Zumo	Bollería	Fruta	Batido

Figura 15.3.—Diagrama de puntos de preferencias en el desayuno de los alumnos.

Las representaciones que hagan los diferentes grupos deben discutirse, compartirse con los compañeros y valorarse, porque reflejan el nivel de su comprensión.

ACTIVIDAD 1: Identifica en un libro de texto de Primaria una propuesta de trabajo para un grupo, en la que se requiera conocer las preferencias de sus participantes.

Redacta una tarea que pueda desarrollarse a partir de esa propuesta.

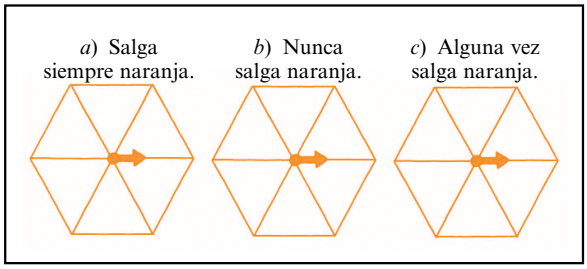
En este nivel, considerar formas alternativas de recoger la información o elegir la forma más apropiada de organizar la información recogida son habilidades que se adquieren a través de la experimentación, de la discusión en clase y mediante la guía del profesor.

A través de estas investigaciones con datos, los estudiantes deben desarrollar la idea de que los datos, los dibujos y los gráficos proporcionan información. Todavía es pronto para establecer predicciones sobre esos datos, aunque se les puede preguntar cosas como: ¿creéis que en la otra clase habrán obtenido los mismos datos que nosotros?

En cuanto a la probabilidad, en esta etapa se puede trabajar de una manera informal a través de preguntas sobre si un suceso es más o menos probable, preguntas que deben partir de las propias experiencias de los niños.

Ejemplo 2

Colorea las ruletas en cada caso, para que:



ACTIVIDAD 2: Describe, a partir de un material de trabajo para primer ciclo de Primaria, una situación que pueda identificar un suceso seguro, otra que identifique un suceso imposible y otra un suceso probable.

Segundo ciclo

La estadística, dentro de la Educación Primaria, debe entenderse como una herramienta que permite resolver situaciones no deterministas, pero siempre basándonos en problemas reales, de modo que sean significativos para el alumnado. Por eso son interesantes actividades con datos extraídos de su entorno, por ellos mismos si es posible.

ACTIVIDAD 3: Diseña para un grupo de estudiantes de segundo ciclo de Primaria una investigación sobre diferentes valores o medidas que se puedan obtener a partir de ellos mismos. Identifica distintos tipos de variables, que abarquen diferentes técnicas y modos de organización y representación.

© Ediciones Pirámide

Para poder seleccionar e interpretar debidamente las representaciones, necesitan comprender la naturaleza de los dos tipos de datos que van a manejar, que van a ser *cualitativos,* que son datos que pueden clasificarse, como la comida preferida o el deporte practicado, y datos de tipo *cuantitativo,* que son aquellos que pueden ordenarse numéricamente, como la estatura o la nota de matemáticas.

Empezarán por la recogida de datos, que podrá hacerse en una tabla de la siguiente forma:

TABLA 15.2

Recogida de datos

N.º Orden	Alumno	Sexo	Edad	Altura (cm)	Nota de matemáticas	Gusto por la verdura	Deporte que practicas
1	Alejandro	M	9	72	7,8	Mucho	Fútbol
2	Daniel	M	10	71	4,1	Poco	Tenis
3	Rosa	F	10	69	6,6	Regular	Fútbol
4	Miriam	F	10	76	3,7	Nada	Baloncesto
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Total	25		241	1.796	149,6		

A partir de estos datos se van construyendo tablas para manejar mejor la información de la que se dispone:

TABLA 15.3

Tabla de frecuencias del gusto por la verdura

Gusto por la verdura	N.º de alumnos
Nada	6
Poco	6
Regular	8
Mucho	5
Total	**25**

A partir de estas tablas, denominadas tablas de distribución de frecuencias, se pueden construir diferentes gráficos, como el gráfico de sectores. Por ejemplo:

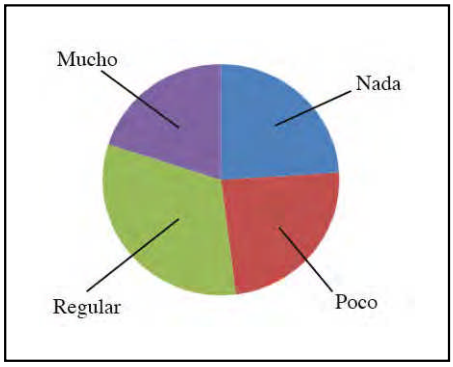


Figura 15.5.—Gráfico de sectores del gusto por la verdura.

© Ediciones Pirámide

En cuanto al azar y la probabilidad, se deben plantear actividades en las que entre en juego el azar, de manera que puedan apreciar que hay sucesos más o menos probables. Una situación cotidiana donde se pueden usar estas expresiones es en el pronóstico del tiempo.

ACTIVIDAD 4: Diseña una actividad que consista en la planificación de un viaje de fin de curso con un grupo de estudiantes del tercer ciclo de Primaria. Contempla una previsión del tiempo, de los itinerarios, de los gastos y de otras variables que contribuyan a tomar decisiones sobre el viaje. Haz una descripción detallada de los valores de las distintas variables implicadas.

Como todavía no ha llegado esa fecha, los alumnos no pueden saber con certeza que ocurrirá en esos días, por lo que al inicio de la actividad deben realizar una lista de expresiones que pueden utilizar para hacer su pronóstico:

Cierto, posible, bastante probable, seguro, imposible, puede ser...

Se ordenan las expresiones en función de la confianza que expresan en que suceda algo.

Imposible
Casi imposible
Seguro...

Algunas de las cosas que podrían suceder en los Pirineos a final de junio:

Es casi imposible que nieve.
Es poco probable que llueva.
Es probable que haga sol.
Es casi seguro que las noches serán frescas.

Pueden plantearse situaciones similares en diferentes ámbitos, como son resultados de juegos, esperanza de vida, etc.

Tercer ciclo

En este ciclo, los alumnos ya deben estar familiarizados con las técnicas de recogida de datos y con su representación, por lo que las actividades deben encaminarse a responder preguntas basadas en los datos, pero teniendo en cuenta que en este proceso pueden y deben hacer observaciones, formular conjeturas y proponer nuevas preguntas. Otra cuestión bastante interesante que se puede plantear en este ciclo es el análisis crítico de gráficos, prestando especial atención a la escala de los ejes; de este modo se puede hacer patente la manipulación que se puede producir en la exposición de determinados resultados. Para ello tenemos una fuente inagotable de recursos en la prensa diaria.

Ejemplo 3

En las siguientes gráficas se muestra la evolución del número de trasplantes realizados entre los años 1991 y 2011, extraídas de dos periódicos distintos. Analiza ambas gráficas y di qué conclusiones puedes extraer a partir de ellas.

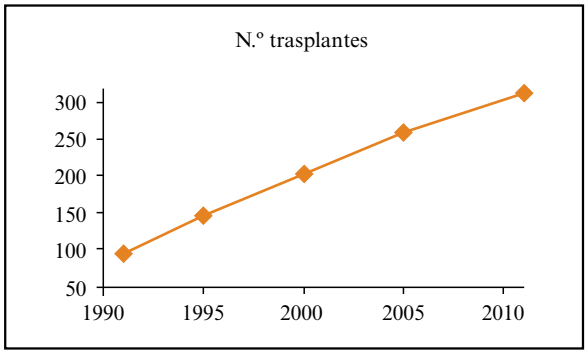


Figura 15.6.—Gráfica de la evolución del número de trasplantes del periódico A.

© Ediciones Pirámide

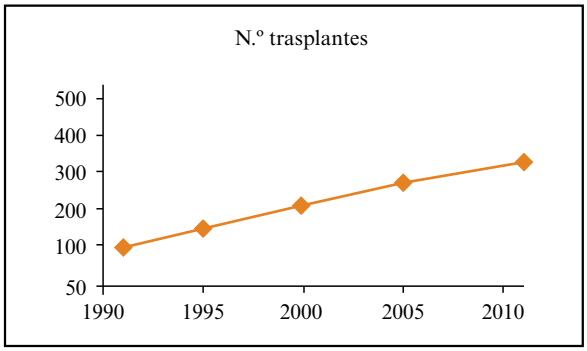


Figura 15.7.—Gráfica de la evolución del número de trasplantes del periódico B.

En realidad, las dos gráficas se han construido con el mismo conjunto de datos. La diferencia de aspecto se debe a que se han usado escalas diferentes. De ahí que en la gráfica del periódico A parezca que el aumento del número de trasplantes haya sido mayor que en la gráfica del periódico B.

ACTIVIDAD 5: Elabora dos gráficas con distinta escala que describan la evolución temporal de un mismo fenómeno a lo largo del mismo período de tiempo. Compara las dos representaciones y describe las diferentes interpretaciones que ambas proporcionan.

Discute con tus compañeros las limitaciones de los gráficos estadísticos.

Ejemplo 4

En la siguiente tabla mostramos el número de accidentes que se han producido día a día en nuestra provincia. Teniendo en cuenta esos datos, estima:

a) La probabilidad de que mañana haya menos de 5 accidentes.
b) La probabilidad de que a lo largo de la semana que viene no haya accidentes.
c) La probabilidad de que mañana haya algún accidente.

L	M	X	J	V	S	D
6	8	8	3	5	7	5
8	3	5	6	6	4	5
6	3	9	5	4	7	

ACTIVIDAD 6: Diseña una tabla de frecuencias de un mismo fenómeno a lo largo de un mes. A partir de los datos de la tabla, propón distintas cuestiones sobre la probabilidad de ocurrencia del fenómeno considerado.

5.4. Evaluación

De forma general, la evaluación debe entenderse como un proceso dinámico que nos va dando información sobre la formación alcanzada y el progreso del alumnado hacia la consecución de los objetivos de aprendizaje; la evaluación debe estar integrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Al finalizar esta etapa educativa se presupone que los estudiantes han debido desarrollar las capacidades necesarias para:

- Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado en forma de tabla o gráfica.
- Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
- Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (imposible, se-

© Ediciones Pirámide

guro o posible, con mayor o menor probabilidad de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.

El proceso de evaluación debe detectar si los estudiantes han logrado desarrollar esas capacidades al término del proceso de instrucción. Para ello plantearemos una tarea o pregunta, a la que el alumno dará respuesta y que el profesor deberá interpretar, asignando un valor a esa interpretación y por último registrando los resultados para la toma posterior de decisiones.

Mostramos algunas actividades en las que se presentan algunas de esas componentes de la evaluación.

Ejemplo 5

Elisa y sus amigos tienen los resultados de unos test que hicieron en el colegio. Elisa tuvo más aciertos, pero su test tenía más preguntas. ¿Quién consiguió los mejores resultados?

María: *He acertado 14 preguntas de 16.*
Pablo: *Yo, 12 de 15.*
Elisa: *¡Qué suerte! Yo sólo he acertado 28 de 40.*

ACTIVIDAD 7: Enuncia distintas tareas para evaluar el sentido estocástisco de los escolares de Primaria. Discute para una de esas tareas la componente o componentes del sentido estocástico que se valora.

Con esta actividad se pretende comprobar si los estudiantes son capaces de identificar la información necesaria para responder la pregunta, organizar dicha información y justificar su respuesta en función de los cálculos realizados.

Ejemplo 6

En la siguiente tabla se recogen las preferencias deportivas de los niños y niñas del colegio de María. Completa la tabla y contesta.

	Niños	Niñas	Total
Natación	23	25	
Tenis	12	10	
Fútbol	18		45
Esquí		20	41
Balonmano	19	21	40
Total	93	103	

a) ¿Qué significa el número 18 de la tabla?
b) ¿Cuántos niños y niñas prefieren el tenis?
c) ¿Cuál es el deporte preferido por los niños?

El enunciado de la actividad sugiere o pretende que los estudiantes utilicen el razonamiento proporcional (frecuencia relativa) para hacer la comparación, ya que sería inadecuado comparar el número de aciertos de cada uno (frecuencias absolutas). Para ello deben tener claro el total de preguntas en cada caso (denominador de la frecuencia relativa) y el número de aciertos (numerador). Es de esperar que en esta etapa educativa sean capaces de establecer esta comparación individuo-individuo, hecho que es necesario para poder pasar a un nivel superior de abstracción en el que ya sí puedan establecer la comparación individuo-grupo.

© Ediciones Pirámide

ACTIVIDAD 8: Localiza en libros de texto tareas que evalúen el conocimiento de los escolares de Primaria para identificar distintos tipos de frecuencias en una tabla. Identifica en cada caso el concepto considerado.

Se trata de una actividad de segundo ciclo, cuyas preguntas están encaminadas a detectar qué nivel de lectura de datos, en una tabla de doble entrada, tienen los estudiantes. El nivel de dificultad va aumentando en cada una de las preguntas, de modo que para responder a la primera pregunta únicamente es necesario que los estudiantes sean capaces de «leer los datos», en la segunda pregunta deben ser capaces de «leer dentro de los datos», puesto que tienen que detectar que el total de la fila «tenis» es la frecuencia de la preferencia de ese deporte para los niños y niñas, y en la tercera pregunta deben ser capaces de «leer más allá de los datos», puesto que deben comparar las frecuencias absolutas de todos los deportes en la columna «niños» e identificar que la más alta (moda) corresponde al deporte preferido en el grupo (población). Es importante destacar que en este tipo de preguntas, relativas a preferencias, los estudiantes podrían omitir los datos y contestar a partir de su propia preferencia, lo que implicaría que no han conseguido alcanzar este nivel de lectura de información.

© Ediciones Pirámide

TÍTULOS RELACIONADOS

Aplicaciones de intervención psicopedagógica, *J. N. García-Sánchez (coord.).*

Atención a las necesidades educativas específicas, *M.ª A. Lou (dir.).*

Bases teóricas y de investigación en educación especial, *J. L. Gallego Ortega y A. Rodríguez Fuentes.*

Cómo enseñar en el aula universitaria, *J. Paredes y A. de la Herrán (Coords.)*

Compendio conceptual de la Educación Social, *M.ª Senra Varela y J. Vallés Herrero.*

Conocer y comprender las organizaciones educativas, *M.ª J. Carrasco, J. M. Coronel, M.ª L. Fernández, M.ª P. García, S. González y E. Moreno.*

Desarrollo curricular de la Educación Física en la Educación Infantil, *P. Gil Madrona (coord.).*

Didáctica., *C. Moral Santaella y M.ª P. Pérez García.*

Didáctica de las Ciencias para Educación Primaria I y II, *J. M. Vílchez González (coord.).*

Didáctica de las Ciencias Sociales para la Educación Primaria, *S. Alonso Arenal (coord.).*

Dificultades de aprendizaje y trastornos del desarrollo, *M.ª J. Fiuza Asorey y M.ª Pilar Fernández Fernández.*

Dificultades del aprendizaje escolar, *J. González-Pienda y J. C. Núñez Pérez (coords.).*

Dislexia en español, *J. E. Jiménez (coord.).*

Educación, neoliberalismo y justicia social, *F. M. Martínez.*

Educación especial, *A. Sánchez Palomino y J. A. Torres González.*

Educación intercultural y aprendizaje cooperativo, *M.ª J. Díaz-Aguado.*

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, *L. Rico Romero y P. Flores Martínez (coords.).*

Escuela y tolerancia, *M.ª J. Díaz-Aguado.*

Estrategias de aprendizaje, *J. A. González-Pienda, J. C. Núñez Pérez, L. Álvarez Pérez y E. Soler Vázquez (coords.).*

Estrategias para mejorar el rendimiento académico de los adolescentes, *M. A. Adell i Cueva.*

Evaluación e intervención didáctica, *F. Peñafiel Martínez, J. A. Torres González y J. M.ª Fernández Batanero.*

Evaluación e intervención psicoeducativa en dificultades de aprendizaje, *A. Miranda, E. Vidal-Abarca y M. Soriano.*

Formación para la inclusión laboral de personas con discapacidad intelectual, *M.ª del R. Cerrillo y S. de Miguel (coords.).*

Iniciación escolar a la escritura y la lectura, *A. Suárez Yánez.*

Intervención psicoeducativa, *L. Álvarez Pérez, J. A. González-Pienda, J. C. Núñez Pérez y E. Soler Vázquez.*

Intervención psicoeducativa en niños con trastornos generalizados del desarrollo, *F. Alcantud Marín (coord.).*

Intervención psicológica en actividad física y deporte, *P. J. Jiménez Martín.*

Intervención psicológica con adolescentes, *M. Garaigordobil.*

Intervención psicológica para desarrollar la personalidad infantil, *M. Garaigordobil Landazabal.*

Intervención psicopedagógica en los trastornos del desarrollo, *J. N. García Sánchez (coord.).*

Intervención psicopedagógica y currículum escolar, *J. A. Beltrán Llera, V. Bermejo Fernández, L. F. Pérez Sánchez, M.ª D. Prieto Sánchez, D. Vence Baliñas y R. González Blanco.*

La convivencia escolar en positivo, *S. Ibarrola-García y C. Iriarte Redín.*

La escuela a examen, *M. Fernández Enguita.*

La orientación en Educación Infantil, *R. Mérida Serrano, A. Ramírez García, C. Corpas Reina y M.ª E. González Alfaya.*

Los medios y las tecnologías en la educación, *M. Area Moreira.*

Manual de didáctica, *I. Gómez Hurtado y F. J. García Prieto.*

Manual de didáctica general para maestros de Educación Infantil y de Primaria, *B. Bermejo y C. Ballesteros (coords.).*

Manual de dificultades de aprendizaje, *M.ª del R. Ortiz González.*

Manual del educador social, *J. Vallés Herrero.*

Manual de logopedia, *F. Villegas Lirola.*

Manual de psicología de la educación, *J. A. González-Pienda, R. González Cabanach, J. C. Núñez Pérez y A. Valle Arias (coords.).*

Manual de psicología de la educación, *M.ª del M. Prados, V. Sánchez, I. Sánchez, R. del Rey, M. Á. Pertegal, M. del C. Reina, P. Ridao, F. J. Ortega y J. Mora.*

.Manual de psicología del desarrollo aplicada a la educación, *V. Muñoz, I. López, I. Jiménez, M. Ríos, B. Morgado, M. Román, P. Ridao, X. Candau y R. Vallejo.*

Manual de tutoría y orientación en la diversidad, *J. Riart Vendrell (coord.).*

Matemáticas para maestros de Educación Primaria, *I. Segovia Alex y L. Rico Romero (coords.)*

Materiales de logopedia, *F. Villegas Lirola.*

Nuevas tecnologías para la educación en la era digital, *J. A. Ortega Carrillo y A. Chacón Medina (coords.).*

Nuevos escenarios digitales, *J. Barroso Osuna y J. Cabero Almenara (coords.).*

Optimización del desarrollo y prevención de riesgos en el aula de educación infantil (Manual + Seminarios), *M.ª Fernández Cabezas, A. Burgos García, G. Alba Corredor y A. Justicia Arráez.*

Orientación Educativa en Educación Primaria, *A. Ramírez García (coord.).*

Orientación educativa e intervención psicopedagógica, *L. E. Santana Vega.*

Orientación psicopedagógica y calidad educativa, *R. Sanz Oro.*

Pensar la educación, *L. Núñez Cubero y C. Romero Pérez.*

Prácticas de psicología de la educación, *L. Álvarez Pérez, J. A. González-Pienda, P. González-Castro y J. C. Núñez Pérez.*

Prevención de las dificultades de aprendizaje, *M.ª J. González Valenzuela.*

Prevención en dificultades del desarrollo y del aprendizaje, *J. N. García-Sánchez (coord.).*

Procesos educativos con TIC en la sociedad del conocimiento, *M. Cebrián de la Serna y M.ª J. Gallego Arrufat (coords.)*

Promover el cambio pedagógico en la universidad, *A. de la Herrán Gascón y J. Paredes (coords.).*

Psicología de la educación y del desarrollo en contextos escolares, *M.ª V. Trianes Torres y J. A. Gallardo Cruz (coords.).*

Psicología de la educación para docentes, *J. I. Navarro Guzmán y C. Martín Bravo (coords.).*

Psicología del desarrollo en la edad escolar, *A. I. Córdoba Iñesta, A. Descals Tomás y D. Gil Llario (coords.).*

Psicología del desarrollo para docentes, *C. Martín Bravo y J. I. Navarro Guzmán.*

Psicología del desarrollo y de la educación, *M.ª V. Trianes (coord.)*

Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, *C. Martín Bravo y J. I. Navarro Guzmán (coords.).*

Psicomotricidad e intervención educativa, *D. Martín Domínguez.*

Relaciones interpersonales en la educación, *M.ª R. Bueno Moreno y M. Á. Garrido Torres.*

Sociología de la educación, *C. Gómez Jaldón y J. A. Domínguez Gómez.*

Teoría de la educación, *P. Casarres y A. Soriano (Coords.).*

Trastornos del espectro autista, *F. Alcantud Marín.*

Vinculaciones afectivas, *M.ª J. Lafuente y M.ª J. Cantero López.*

www.edicionespiramide.es